

Números complejos

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Fue el más grande matemático del Siglo XIX y probablemente, junto con Arquímedes y Newton, uno de los tres grandes matemáticos de todos los tiempos.

Gauss nació en Brunswick, Alemania, en el seno de una familia obrera. Fue un niño prodigio y desde su niñez mostró una asombrosa habilidad para el cálculo. Cuando aún no tenía 3 años, observó a su padre que era capataz, quien hacía las nóminas de los albañiles. El padre cometió un error y el hijo se lo hizo notar y cuando revisó los números halló que el pequeño -precoz muchacho- estaba en lo cierto.

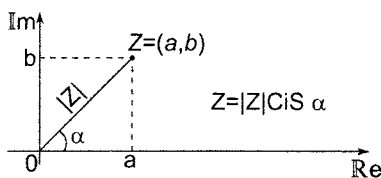
La sagacidad con que Gauss guardaba sus teorías se explica en parte a su pasión por la perfección "poco, pero selecto" era su lema.

Contribuyó a allanar el camino del álgebra abstracta superior con su pensamiento sobre los números complejos, demostró por primera vez con tanta rigurosidad el teorema fundamental del álgebra.

Procedió hacia 1819 a inventar otro tipo de números al cual su compatriota Hermann Grassmann en 1840 la llamaría el álgebra de los hiper complejos ($a+bi+cj+dk$), contradiciendo a las leyes de la aritmética básica ($xy \neq yx$; siendo x , y hipercomplejos).

Ha dejado innumerables aportes a la ciencia principalmente a la matemática.

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$



Sistemas hipercomplejos

Sea K un cuerpo cualquiera (puede ser el de los complejos, por ejemplo, pero no es imprescindible) cuyos elementos son $\{a, b, \dots\}$; dotado de un elemento unidad, e , y sea V un espacio vectorial sobre K , de n dimensiones. Si los elementos de V son indicados por $\{\vec{X}, \vec{Y}, \dots\}$, sabemos que, en este espacio vectorial:

- 1° Existe una ley de composición interna, indicada "+", conmutativa, asociativa, que admite un elemento neutro, $\vec{0}$, y tal que cada vector \vec{X} tenga para esta ley un opuesto \vec{X}^* : $\vec{X} + \vec{X}^* = \vec{X}^* + \vec{X} = \vec{0}$;
- 2° Existe una ley de composición externa con operadores en K , asociativa y distributiva con respecto a los elementos de V y a los elementos de K ;
- 3° Existe por lo menos n vectores $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \dots, \vec{U}_n$ tales que un vector cualquiera de V se expresa linealmente en función de estos vectores y de coeficientes k_1, k_2, \dots, k_n pertenecientes a K :

$$\vec{X} = k_1 \vec{U}_1 + k_2 \vec{U}_2 + \dots + k_n \vec{U}_n = \sum_{i=1}^n k_i \vec{U}_i$$

Para dar al espacio V una estructura de anillo, es preciso definir en el mismo una segunda ley de composición interna, la operación "x" que es asociativa, distributiva con respecto a la adición y compatible con la ley externa, es decir, de tal clase que tengamos, en especial:

$$(k\vec{X})\vec{Y} = \vec{X}(k) = k, \quad k \in K$$

Se establece un cuadro cuadrado que define el producto del anillo considerado, el cual es denominado entonces sistema hipercomplejo o, mejor un álgebra. Sus elementos se denominan números hipercomplejos. Cuando los elementos de base forman un grupo para la multiplicación, se dice que se ha formado el álgebra del grupo.

Fuente: Álgebra Moderna - William F. Artemus.

Números complejos

OBJETIVOS:

- Estudiar un nuevo campo numérico llamado "El campo Complejo" que desempeña un papel importante en la resolución de ecuaciones polinomiales.
- Ver la aplicación en las diferentes ramas de la ingeniería y de la ciencia.
- Aplicar dicha teoría en los circuitos eléctricos, geometría fractal, etc.

INTRODUCCIÓN

Los números complejos desempeñan un papel muy importante en el desarrollo del Álgebra Moderna; ya que la Teoría de Ecuaciones, en especial las ecuaciones polinomiales obedece al Teorema Fundamental del Álgebra, cuya demostración es complicada por medios algebraicos; en cambio por el análisis complejo, utilizando el Teorema de Lioville; la demostración es bastante sencilla y rigurosa (ver cualquier libro de análisis complejo).

En el estudio de un fenómeno físico o químico necesitamos hacer uso de las ecuaciones diferenciales, ordinarias y parciales; para resolver dichas ecuaciones se utilizan a los números complejos por lo general; por ejemplo para resolver un problema de ondas se utiliza el método de variables separables donde se aplica la serie de Fourier.

Por ello, su aplicación es frecuente en todas las ramas de la Ingeniería. Por ejemplo en la electrónica se utiliza en los circuitos eléctricos.

Cabe mencionar que en estas últimas décadas se ha desarrollado la Geometría Fractal; donde entre diversos tópicos intervienen en ella los números complejos los cuales son un componente importante y obviamente su importancia crece por las aplicaciones propias de la Geometría Fractal (Física, Química, Biología, Sociología, Psicología, Economía, Arte, etc.). La Geometría Fractal nace por la misma necesidad de afrontar problemas reales; ya que la geometría tradicional o Euclídea tiene limitaciones por las formas encontradas en la naturaleza, como montañas, franjas costeras, sistema hidrográficos, nubes, árboles, etc., un sin número de otros objetos que no son fácilmente descritos por la geometría Euclídea.

En cambio la geometría fractal provee una descripción y una forma de modelo matemático para las aparentemente complicadas formas de la naturaleza; todo esto es posible por que la dimensión fractal no es **entera** como en la Geometría Euclídea.

Una característica propia de la Geometría Fractal es el de autosimilitud, esto quiere decir, que cada porción de un gráfico fractal visto inclusive con una lupa posee la misma forma y características que el gráfico inicial.

NOCIÓN HISTÓRICA

El problema de resolver las ecuaciones algebraicas ha llevado al hombre desde los números naturales, a los enteros, a los racionales, a los números irracionales y al sistema completo de los números reales.

En el siglo XIX, Leopoldo Kronecker, el primer crítico de los fundamentos del análisis moderno, describió esta evolución larga y gradual de la comprensión del sistema de números por el hombre. Sabemos por ejemplo, que no existe ningún número real "x" con la propiedad de verificar $x^2 + 1 = 0$; el problema es análogo; cuando el hombre no conocía los números enteros negativos; sólo contemplaba la ecuación $x + 9 = 4$; el número -5 aún no tenía algún sentido.

Discutiremos el sistema de los números complejos siguiendo estas mismas líneas, las definiciones y reglas se dan en primer lugar.

Demostraremos después como este sistema de números es una extensión del sistema de los números reales.

La primera representación clara de los números complejos y la primera prueba satisfactoria del teorema fundamental del álgebra la dio Karl Gauss (1777 - 1855) en su disertación doctoral en 1799. El término número complejo lo introdujo Gauss y la definición de números complejos como pares ordenados de números reales fue usada por primera vez en 1835 por el matemático irlandés William Rowan Hamilton (1805 - 1865) y luego Herman Grassman (1809 - 1877) extendió esta definición de los números complejos a las n-adas ordenadas de números reales $(x_1; x_2; x_3; \dots; x_n)$; estos números hipercomplejos generalizan a los números complejos y a los cuaterniones de Hamilton.

Los números complejos son de capital importancia en Álgebra. En la teoría de las funciones analíticas de una variable compleja; los números complejos juegan un papel importante en las ecuaciones diferenciales; en los circuitos eléctricos, oscilaciones, vibraciones, fenómenos ondulatorios, en los fractales que es una herramienta poderosa así como los diferenciales.

DEFINICIÓN DE NÚMERO COMPLEJO

Un número complejo es un par ordenado de números reales $(x; y)$; es decir $x; y \in \mathbb{R}$; donde "x" es la primera componente "y" es la segunda componente.

Notación: $z = (x; y)$; $x, y \in \mathbb{R}$

"x" : parte real

"y" : parte imaginaria

Luego formamos el conjunto de los números complejos; denotado por

$$\mathbb{C} = \{(x; y) ; x, y \in \mathbb{R}\}$$

Es decir: $\operatorname{Re}(z) = x$

$$\operatorname{Im}(z) = y$$

Ejemplos de Números Complejos

$$z_1 = (3; 7)$$

$$z_2 = (-1; \sqrt{2})$$

$$z_3 = (0; 4)$$

$$z_4 = (0; 0)$$

OPERACIONES DEFINIDAS EN \mathbb{C}

Sean los complejos

$$z_1 = (x_1; y_1) ; z_2 = (x_2; y_2)$$

Se define

I. Adición

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2 ; y_1 + y_2)$$

Ejemplo:

Sea $z_1 = (2; 3) ; z_2 = (4; 5)$

Entonces $z_1 + z_2 = (2+4 ; 3+5) = (6; 8)$

$$z_1 \cdot z_2 = (2 \cdot 4 - 3 \cdot 5 ; 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (-7; 22)$$

II. Multiplicación

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2 ; x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

Debe observarse que la adición de números complejos; es la misma operación de adición en V_2 (álgebra vectorial bidimensional); la operación de multiplicación se distingue en \mathbb{C} y V_2 ; en los números complejos la multiplicación origina otro número complejo; en cambio la multiplicación de dos vectores origina un escalar; además la diferencia es que un vector tiene dirección; en cambio un número complejo no tiene dirección alguna.

IGUALDAD DE NÚMEROS COMPLEJOS

Dados $z_1 = (x_1; y_1)$; $z_2 = (x_2; y_2)$

$$z_1 = z_2 \text{ si y sólo si } x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

Resolución:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow 4 = x-3 \wedge y+1=5-y$$

Ejemplo:

Sean $z_1 = (4; y+1)$ \wedge $z_2 = (x-3; 5-y)$

Calcular $x+y$ si $z_1 = z_2$

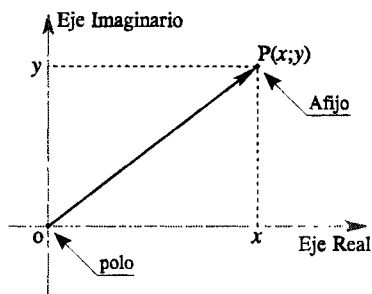
De ahí $x = 7 \wedge y = 2$

$$\therefore x + y = 9$$

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA (Plano de Gauss)

La representación se realiza en un plano, al cual lo llamaremos plano complejo donde el eje "x" representa al eje de la parte real y el eje "y" al de los imaginarios; a dicho plano se le denomina "plano de Gauss".

Sea $z = (x; y)$; $x > 0$; $y > 0$



Donde \overrightarrow{OP} es el radio vector del complejo $z = (x; y)$

Definición: El conjunto \mathbb{C} ; junto con las operaciones de adición y multiplicación definidas anteriormente y las propiedades a mencionar forman el cuerpo de los números complejos.

PROPIEDADES: $\forall z_1; z_2; z_3 \in \mathbb{C}$

A_1 : $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$ (Ley de clausura o cerradura para la adición)

A_2 : $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (Ley conmutativa para la adición)

A_3 : $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
(Ley asociativa para la adición)

A_4 : Existe un único ($\exists!$) elemento z_0 de la forma $(0; 0)$ tal que $z + z_0 = z \quad \forall$ complejo z (existencia del elemento neutro aditivo).

A_5 : Existe un único elemento $-z \in \mathbb{C} / z + (-z) = z_0 = (0; 0) \quad \forall z \in \mathbb{C}$
(existencia del elemento inverso aditivo)

M_1 : $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$ (Ley de clausura o cerradura para la multiplicación)

M_2 : $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (Ley conmutativa para la multiplicación).

M_3 : $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ (Ley asociativa para la multiplicación)

M_4 : Existe un único ($\exists!$) $z' \in \mathbb{C}$ de la forma $z' = (1; 0)$ tal que $z \cdot z' = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$ (existencia del elemento neutro multiplicativo).

M_5 : Existe un único elemento $z^{-1} \in \mathbb{C}$ tal que $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = (1; 0) \quad \forall z \in \mathbb{C}$ y $z \neq (0; 0)$ (existencia del elemento inverso multiplicativo).

D : $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$
(ley distributiva)

La demostración de estas propiedades se hacen en base a los axiomas de los números reales (ver capítulo de números reales). Demostraremos únicamente A_3 y M_2 las demás quedan como ejercicio de rutina para el lector.

Demostración de A_3

Sean $z_1 = (x_1; y_1)$; $z_2 = (x_2; y_2)$; $z_3 = (x_3; y_3)$
tal que $\{x_1; x_2; x_3; y_1; y_2; y_3\} \subset \mathbb{R}$

entonces $(z_1 + z_2) + z_3 = (x_1 + x_2; y_1 + y_2) + (x_3; y_3)$
 $= (x_1 + x_2 + x_3; y_1 + y_2 + y_3)$

También $z_1 + (z_2 + z_3) = (x_1; y_1) + (x_2 + x_3; y_2 + y_3)$
 $= (x_1 + x_2 + x_3; y_1 + y_2 + y_3)$

Se observa $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

Demostración de M_2

Sean

$z_1 = (x_1; y_1)$; $z_2 = (x_2; y_2)$; $\{x_1; y_1; x_2; y_2\} \subset \mathbb{R}$
entonces

$z_1 z_2 = (x_1; y_1)(x_2; y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2; x_1 y_2 + y_1 x_2)$

también $z_2 z_1 = (x_2; y_2)(x_1; y_1)$
 $= (x_2 x_1 - y_2 y_1; x_2 y_1 + y_2 x_1)$
 $= (x_1 x_2 - y_1 y_2; x_1 y_2 + y_1 x_2)$
(propiedad conmutativa de números reales)

$$= z_1 z_2$$

$$\therefore z_2 z_1 = z_1 z_2$$

Definición: El sistema de los números complejos representa una ampliación del sistema de los números reales; bajo ciertas condiciones, con este fin veamos los puntos situados en el eje de abscisas; o sea los puntos de la forma $(a; 0)$; poniendo en correspondencia al punto $(a; 0)$ el

número real a ; obtenemos evidentemente una correspondencia biunívoca entre el conjunto considerado de puntos y el conjunto de todos los números reales. Como aplicación de las operaciones definidas en \mathbb{C} tenemos:

$$(a; 0) + (b; 0) = (a + b; 0)$$

$$(a; 0)(b; 0) = (ab; 0)$$

O sea los puntos $(a; 0)$ se multiplican entre sí igual que los números reales correspondientes; por lo tanto dichos números no se diferencian en nada por sus propiedades algebraicas de los números reales representados ordinariamente por puntos de una recta; por lo tanto concluimos:

$$(a; 0) \equiv a \quad \text{ó} \quad (a; 0) = a$$

Ejemplo:

Al par $(12; 0)$ le corresponde el número real 12
Es decir $(12; 0) = 12$; análogamente citamos algunos ejemplos:

- $(4; 0) = 4$
- $(a+b; 0) = a+b$
- $(1; 0) = 1$ (unidad real)

TEOREMA

$$\forall r \in \mathbb{R}; z = (x; y) \\ \{x; y\} \subset \mathbb{R} ; \text{ se cumple } rz = (rx; ry)$$

Prueba

$$\begin{aligned} rz &= r(x; y) \\ &= (r; 0)(x; y); \text{ efectuando la multiplicación} \\ &= (rx - 0y; 0x + ry) = (rx; ry) \\ \therefore rz &= (rx; ry) \end{aligned}$$

CANTIDADES IMAGINARIAS

Son aquellos números que resultan de extraer una raíz de índice par a un número real negativo.

Así por ejemplo

$$\sqrt{-1}; \sqrt{-12}; \sqrt[4]{-5}; \sqrt[2n]{-16}$$

Donde $n \in \mathbb{N}$

De todos éstos el más importante es $\sqrt{-1}$; al cual denominaremos unidad imaginaria, cuya notación universal es

$$i = \sqrt{-1}$$

Aplicación:

$$\sqrt{-16} = \sqrt{16(-1)} = \sqrt{16} \sqrt{-1} = 4i$$

$$\sqrt{-5} = \sqrt{5(-1)} = \sqrt{5} \sqrt{-1} = \sqrt{5} i$$

UNIDAD IMAGINARIA

El número complejo $(0; 1)$ es la unidad imaginaria; tiene la particular notación $i = (0; 1)$

TEOREMA

$$i^2 = -1 \quad ; \quad i = (0; 1)$$

Prueba

$$\begin{aligned} i^2 &= (0; 1)(0; 1) = (0-1; 0+0) \\ &= (-1; 0) = -1 \\ \therefore i^2 &= -1 \end{aligned}$$

TEOREMA

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad (0; y) = yi$$

Prueba

$$\begin{aligned} yi &= (y; 0)(0; 1) \\ &= (0-0; y+0) = (0; y) \\ \therefore (0; y) &= yi \end{aligned}$$

POTENCIAS ENTERAS DE LA UNIDAD IMAGINARIA

Estudiaremos el comportamiento del número i^n ; $\forall n \in \mathbb{Z}$; teniendo en cuenta la siguiente definición:

$$i^0 = 1 \quad ; \quad i^1 = i$$

$$\begin{aligned} i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= i^2 \cdot i = -i \\ i^4 &= i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1 \\ i^5 &= i^4 \cdot i = i \\ i^6 &= i^4 \cdot i^2 = -1 \\ i^7 &= i^4 \cdot i^3 = -i \\ i^8 &= i^4 \cdot i^4 = 1 \\ i^9 &= i^8 \cdot i = i \\ i^{10} &= i^8 \cdot i^2 = -1 \\ i^{11} &= i^8 \cdot i^3 = -i \\ i^{12} &= i^8 \cdot i^4 = 1 \end{aligned}$$

⋮

Se observa que las potencias enteras de i se repiten cada cuatro veces y sólo toman uno de los cuatro valores $i; -1; -i; 1$; esto merece una especial atención.

PROPIEDADES

Se observa principalmente que:

$$i^4 = 1 \quad ; \quad i^8 = 1 \quad ; \quad i^{12} = 1 \quad ; \quad \text{etc.}$$

Esto implica que la unidad imaginaria elevado a un múltiplo de cuatro es igual a la unidad.

Por lo tanto $i^4 = 1$

En general

$$i^{4k} = 1$$

Luego deducimos que

$$i^{4k+1} = i \quad ; \quad i^{4k+2} = -1 \quad ; \quad i^{4k+3} = -i$$

Generalizando

$$i^{4k} = 1^k \quad ; \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplos:

$$1. \quad i^{22} = i^{4 \cdot 5 + 2} = -1$$

$$2. \quad i^{43} = i^{4 \cdot 10 + 3} = -i$$

$$3. \quad i^{81} = i^{4 \cdot 20 + 1} = i$$

Luego se deduce

$$i^{-k} = \left(i^k\right)^{-1} = i^{-k} \quad ; \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

TEOREMA

$$i^{-k} = (-1)^k i^k \quad ; \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo 1Calcular $i^{4683} + i^{527}$ **Resolución:**

Se observa que

$$4683 = 4 + 3$$

$$-527 = -(4 + 1) = 4 + 1$$

$$\Rightarrow i^{4683} + i^{527} = i^{4+3} + i^{4+1} = -i + i = 0$$

Ejemplo 2Reducir $S = i^{48} + i^{17} + i^9$ **Resolución:**

$$i^{48} = (-1)^{48} i^{48} = 1$$

$$i^{17} = (-1)^{17} i^{17} = -i$$

$$\text{Luego } S = 1 - i + i \therefore S = 1$$

PROPIEDADES:

$$\text{I. } i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$$

$$\text{II. } i^{4k} + i^{4k+1} + i^{4k+2} + i^{4k+3} = 0 ; \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{III. } i^k + i^{k+1} + i^{k+2} + i^{k+3} = 0 ; \forall k \in \mathbb{Z}$$



(Por propiedades aritméticas)

$$1. \quad 2^n = 4 ; \forall n \in \mathbb{N} ; n > 2$$

$$2. \quad (4+r)^n = 4^n + r^n ; \forall n \in \mathbb{N} / \forall r \in \mathbb{Z}$$

Ejemplos:

$$1. \quad \text{Calcular } i^{2^{2^{2^2}}}$$

Resolución:

$$i^{2^{2^{2^2}}} = i^4 = 1$$

$$2. \quad \text{Hallar el valor de } z_1 = i^{5^{5^5}}$$

Resolución:

Se observa que

$$5^{5^5} = 4 + 1 \Rightarrow z_1 = i^{4+1} = i$$

$$3. \quad \text{Determinar } z_2 = i^{3^{3^3}}$$

Resolución:

$$3^{3^3} = (4 - 1)^{3^3} = 4 - 1 = 4 + 3$$

$$\Rightarrow z_2 = i^{4+3} = i$$

$$4. \quad \text{Simplificar}$$

$$W = i^{2!} + i^{3!} + i^{4!} + \dots + i^{120!}$$

Resolución:El factorial de n siempre es múltiplo de cuatro $\forall n > 4$

Entonces

$$W = \underbrace{i^2 + i^6}_{-2} + \underbrace{i^4 + i^8 + \dots + i^{120}}_{117} i^4$$

$$W = -2 + 117 = 115 \therefore W = 115$$

FORMA CARTESIANA O BINÓMICA DE UN COMPLEJO**TEOREMA**

Todo número complejo z de la forma $z = (x; y)$ es posible escribirlo como $z = x + yi$

Demostración:

$$\text{Sea } z = (x; y) ; x, y \in \mathbb{R}$$

$$\text{Pero } z = (x; y) = (x; 0) + (0; y)$$

$$\text{Por definición } (x; 0) = x$$

$$\text{Por teorema } (0; y) = yi$$

$$\therefore z = (x; y) = x + yi$$

Ejemplo:

Representar en forma binómica o cartesiana cada uno de los siguientes números complejos dados por sus componentes.

$$z_1 = (4; 5) = 4 + 5i$$

$$z_3 = \left(\frac{1}{3}; -\frac{5}{2} \right) = \frac{1}{3} - \frac{5}{2}i$$

$$z_2 = (\sqrt{3}; 6) = \sqrt{3} + 6i$$

$$z_4 = (0; -5) = -5i$$

TIPOS DE NÚMEROS COMPLEJOS

Luego de algunas definiciones necesarias tenemos los tipos de complejos:

- 1. Complejo Real o Puramente Real.**— Es aquel número complejo que carece de la parte imaginaria; es decir su parte imaginaria es cero.

Notación:

$$z = (x; 0) = x; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- 2. Complejo Imaginario Puro.**— Es aquel número complejo que carece de la parte real; es decir su parte real es cero; además su parte imaginaria siempre es diferente de cero.

Notación:

$$z = (0; y) = yi; \quad \forall y \in \mathbb{R} - \{0\}$$

- 3. Complejo Nulo.**— Es aquel número complejo que presenta la parte real e imaginaria igual al número cero; es decir las dos componentes son nulas.

Notación:

$$z = (0; 0)$$

DEFINICIONES

1. Dado el complejo $z = (x; y) = x + yi$ se define el conjugado de z denotado por \bar{z} ; tal que

$$\bar{z} = (x; -y) = x - yi$$

2. Dado el complejo $z = (x; y) = x + yi$ se define el opuesto de z denotado por z^* ; tal que:

$$z^* = (-x; -y) = -x - yi$$

Ejemplo 1

Sea $z = (4; -5)$

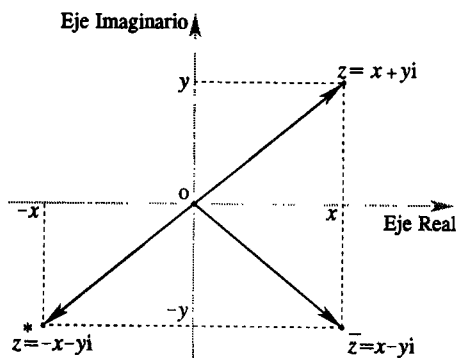
$$\begin{cases} \bar{z} = (4; 5) \\ z^* = (-4; 5) \end{cases}$$

Ejemplo 2

Sea $w = 10 + 12i$

$$\rightarrow \begin{cases} \bar{w} = 10 - 12i \\ w^* = -10 - 12i \end{cases}$$

Representación Geométrica de $z = (x; y)$, de su conjugado y su opuesto.

PROPIEDADES: $z; z_1; z_2 \in \mathbb{C}$

- $z = \bar{z} \Leftrightarrow z$ es complejo real
- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\bar{\bar{z}} = -z = z^* \Leftrightarrow z$ es complejo imaginario puro
- $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}; \quad \forall z_2 \neq (0; 0)$
- $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n; \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\overline{\left(\sqrt[n]{z}\right)} = \sqrt[n]{\bar{z}}; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

OPERACIONES EN LA FORMA BINÓMICA O CARTESIANA

Sean los números $z_1 = a+bi$ \wedge $z_2 = c+di$, se definen las siguientes operaciones:

Adición de números complejos

Dados los números complejos z_1, z_2 se tiene: $z_1 + z_2 = (a+bi) + (c+di)$

$$\therefore z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i$$

Ejemplo:

Sean

$$\begin{aligned} z_1 &= 3+6i \wedge z_2 = -4+7i \\ \Rightarrow z_1 + z_2 &= (3-4) + (6+7)i \\ \therefore z_1 + z_2 &= -1+13i \end{aligned}$$

Sustracción de números complejos

Dados los complejos z_1, z_2 entonces

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{Sean } z_1 &= 6+2i \wedge z_2 = -3+7i \\ \Rightarrow z_1 - z_2 &= z_1 + (-z_2) = (6+2i) + (3-7i) \\ &= 9-5i \\ \therefore z_1 - z_2 &= 9-5i \end{aligned}$$

Multiplicación de números complejos

Dados los números complejos z_1, z_2 se tiene $z_1 z_2 = (a+bi)(c+di)$
 $= (ac+adi+bc+bd i^2)$
 $= (ac-bd) + (bc+ad)i$

$$\therefore z_1 z_2 = (ac-bd) + (bc+ad)i$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{Sean } z_1 &= 3+2i ; z_2 = 2-5i \\ \Rightarrow z_1 z_2 &= (3+2i)(2-5i) = 6-15i+4i+10 \\ \text{Luego } z_1 z_2 &= 16-11i \end{aligned}$$



Si recordamos la definición rigurosa de la multiplicación de dos complejos como par ordenado, tenemos:

$z_1 z_2 = (a;b)(c;d) = (ac-bd ; ad+bc)$
 y lo expresamos en forma binómica

$z_1 z_2 = (ac-bd) + (ad+bc)i$
 Llegamos al mismo resultado, es decir la definición es buena.

Ejemplo:

Realizar las operaciones indicadas y hallar:

$$z = (1+i)(1+3i)(3-i)$$

Resolución:

Como la multiplicación de números complejos tiene la propiedad asociativa no interesa el orden en que se empiece a multiplicar los factores.

Luego se tiene

$$\begin{aligned} z &= (1+i)(1+3i)(3-i) \\ z &= (1+i)(3-i+9i-3i^2) = \underbrace{(1+i)(6+8i)} \\ z &= 6+8i+6i+8i^2 = -2+14i \\ \therefore z &= -2+14i \end{aligned}$$

División de números complejos

Sean los números complejos z_1, z_2 para efectuar

la división $\frac{z_1}{z_2}$ habrá que multiplicar a z_1 y z_2

por $\overline{z_2}$ con lo cual se obtiene

$$\begin{aligned} z_1 &= a+bi, z_2 = c+di \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} \\ &= \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Ejemplo 1

$$\text{Efectuar } z = \left[\frac{5+3i}{2-i} \right] \left[\frac{2+i}{5-3i} \right]$$

$$= \left(\frac{8+15i}{17} \right) \left(\frac{3+4i}{5} \right) = \frac{-36+77i}{85}$$

$$\therefore z = -\frac{36}{85} + \frac{77}{85}i$$

Resolución:

En este caso podemos ordenar en forma conveniente, entonces

$$\begin{aligned} z &= \left(\frac{5+3i}{5-3i} \right) \left(\frac{2+i}{2-i} \right) \\ &= \left(\frac{(5+3i)(5+3i)}{(5-3i)(5+3i)} \right) \left(\frac{(2+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} \right) \\ &= \left(\frac{16+30i}{34} \right) \left(\frac{3+4i}{5} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 2

$$\text{Efectuar } W = \frac{i}{(1-3i)(i-3)}$$

Efectuando en el denominador, tenemos

$$W = \frac{i}{i-3-3i^2+9i} = \frac{i}{10i} = \frac{1}{10}$$

$$\therefore W = \frac{1}{10}$$

POTENCIACIÓN

La potenciación en forma binómica tiene muchas limitaciones; por ello se utiliza cuando las potencias son pequeñas.

Ejemplo:

Efectuar

$$(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i$$

$$(1+i)^4 = [(1+i)^2]^2 = (2i)^2 = -4$$

$$(1-i)^2 = 1-2i+i^2 = -2i$$

$$(1-i)^4 = [(1-i)^2]^2 = (-2i)^2 = -4$$

Se observa

$$(1+i)^4 = (1-i)^4 = -4$$

Ejemplo

Reducir

$$W = \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^5 + \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^9$$

Resolución:

Efectuando por separado

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i;$$

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$$

Reemplazando tenemos

$$W = (i)^5 + (-i)^9 = i - i = 0$$

$$\therefore W=0$$

Resultados importantes:

$$(1+i)^2 = 2i \quad ; \quad (1-i)^2 = -2i$$

$$(1+i)^3 = 2i(1+i) \quad ; \quad (1-i)^3 = -2i(1-i)$$

$$(1+i)^4 = -4 \quad ; \quad (1-i)^4 = -4$$

$$\boxed{\frac{1+i}{1-i} = i} \quad ; \quad \boxed{\frac{1-i}{1+i} = -i}$$

RADICACIÓN EN \mathbb{C}

En la forma binómica, sólo estudiaremos la raíz cuadrada; en forma general lo estudiaremos más adelante.

DEFINICIÓN

La raíz cuadrada de un número complejo z es un número complejo w tal que $w^2 = z$.

En base a la raíz cuadrada de números reales positivos, probaremos que la raíz cuadrada de un número complejo siempre existe.

TEOREMA

Dado $z \in \mathbb{C}$, $\exists w \in \mathbb{C}$, tal que: $w^2 = z$

Demostración:

Dado: $z = x + yi$; $z \neq 0$

Debemos hallar: $w = a + bi$, tal que $w^2 = z$

Esta última condición plantea la igualdad

$$(a + bi)^2 = x + yi$$

Efectuando y ordenando el primer miembro:

$$a^2 - b^2 + 2abi = x + yi$$

Igualando las partes reales e imaginarias se tiene

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = x \\ 2ab = y \end{cases}$$

Reemplazando $b = \frac{y}{2a}$ en la primera ecuación

$$a^2 - \frac{y^2}{4a^2} = x$$

Lo que se convierte en $4a^4 - 4xa^2 - y^2 = 0$

Resolviendo para a^2 se tiene:

$$a^2 = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{2}$$

pero $a^2 \geq 0$; entonces se debe tomar

$$a^2 = \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2} \dots\dots\dots (i)$$

En forma análoga se obtiene

$$b^2 = \frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2} \dots\dots\dots (ii)$$

Nos interesa los valores de a y b

$$a = \pm \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}} ; b = \pm \sqrt{\frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}}$$

Pero $2ab = y$

entonces, se tendrá lo siguiente

Si: $y > 0 \rightarrow a \wedge b$ tienen el mismo signo

Si: $y < 0 \rightarrow a \wedge b$ tienen signos diferentes

Por lo tanto

$$W = \pm \left(\sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}} + (*) \sqrt{\frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}} i \right)$$

donde $(*)$ es el signo de "y"

Ejemplo:

Hallar la raíz cuadrada de $6 - 8i$

Resolución:

Aplicando la fórmula anterior

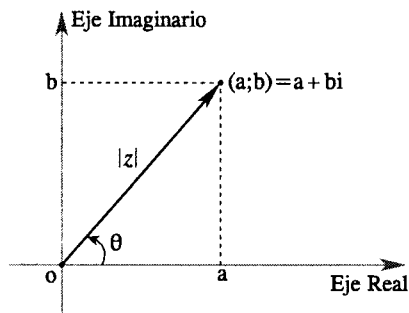
$$\sqrt{6 - 8i} = \pm \left(\sqrt{\frac{6 + \sqrt{6^2 + 8^2}}{2}} - \sqrt{\frac{-6 + \sqrt{6^2 + 8^2}}{2}} i \right)$$

$$= \pm (2\sqrt{2} - \sqrt{2}i) = \pm \sqrt{2}(2 - i)$$

$$\therefore \sqrt{6 - 8i} = \pm \sqrt{2}(2 - i)$$

MÓDULO O VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Dado $z = a + bi$; el módulo o valor absoluto de z es un número real no negativo denotado por $|z|$; tal que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$



Nota: Geométricamente, el módulo nos representa la magnitud del radio vector del complejo z de origen $(0;0)$ y extremo final el afijo de z .

Ejemplo:

Hallar los módulos de los siguientes complejos

1. $z_1 = 5 + 4i$
2. $z_2 = 1 - i$
3. $z_3 = -5$
4. $z_4 = -6i$
5. $z_5 = -3 - 4i$

Resolución:

1. $|z_1| = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$
2. $|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
3. $|z_3| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = 5$
4. $|z_4| = \sqrt{0^2 + (-6)^2} = 6$
5. $|z_5| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$z = a \Rightarrow |z| = |a|$$

$$z = bi \Rightarrow |z| = |b|$$

PROPIEDADES

De la definición de módulo se desprende las siguientes propiedades; sean $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ entonces:

1. $|z| \geq 0$; $|z| = 0 \Leftrightarrow z = (0;0)$
2. $|z| = |\bar{z}| = |z^*|$
3. $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$
4. $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$; $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$
5. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
6. $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$; $\forall z_2 \neq (0;0)$
7. $|z^n| = |z|^n$; $\forall n \in \mathbb{N}$
8. $\sqrt[n]{|z|} = \sqrt[n]{|z|}$; $\forall n \in \mathbb{N}$; $n \geq 2$
9. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
10. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$

Demostraremos algunas de las propiedades:

$$\begin{aligned} 5. \quad |z_1 z_2|^2 &= (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) \\ &= (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2 \end{aligned}$$

Quitando exponentes se tiene

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$7. \quad z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ veces}}$$

(Def. de exponente natural)

Tomando módulo $|z^n| = |z \cdot z \cdot z \cdot \dots \cdot z|$, usando la propiedad 5

$$\begin{aligned} |z^n| &= |z| |z| |z| \dots |z| ; n \text{ veces} \\ \therefore |z^n| &= |z|^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9. \quad |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= |z_1|^2 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + |z_2|^2 \end{aligned}$$

pero

$$z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \wedge \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq |z_1 \bar{z}_2|$$

Entonces

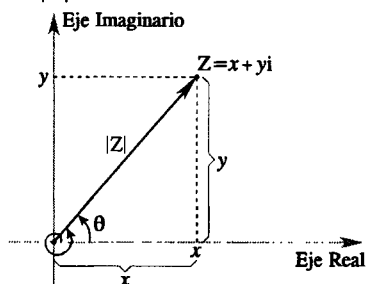
$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1||\bar{z}_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$

luego $|z_1 + z_2| \leq (|z_1| + |z_2|)^2$; quitando exponentes se tiene $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

FORMA POLAR O TRIGONOMÉTRICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

Sea $z = a + bi$ un número complejo diferente del nulo.

Es decir $|z| \neq 0$



De la figura $x = |z| \cos \theta$; $y = |z| \sin \theta$

Donde $\operatorname{Tg} \theta = \frac{y}{x}$;

Entonces $z = x + yi = |z| \cos \theta + |z| \sin \theta i$

$$\therefore z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Es la representación trigonométrica o polar de un complejo; donde al ángulo θ se le denomina el argumento de z denotado por $\operatorname{Arg}(z)$; es decir

$$\operatorname{Arg}(z) = \theta$$

Se observa que θ puede tomar infinitos valores como

$\theta_1 = \theta$; $\theta_2 = \theta + 2\pi$; $\theta_3 = \theta + 4\pi$ para evitar este problema se da la siguiente definición:

Argumento principal de un número complejo

De todos los valores de θ ; elegimos aquel que se encuentra en el intervalo $[0; 2\pi)$; es decir $0 \leq \theta < 2\pi$; a dicho θ se le denomina argumento principal, cuya notación es:

$$\operatorname{Arg}(z) = \theta$$

Conociendo el argumento principal de z denotado por $\operatorname{Arg}(z)$ podemos generar otros cuya notación es

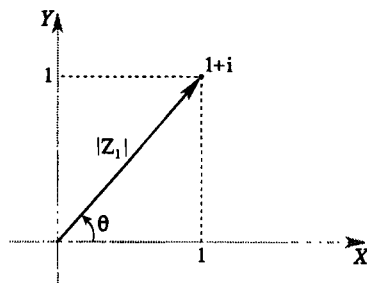
$$\operatorname{arg}(z) = \operatorname{Arg}(z) + 2k\pi$$

$$K = 0 ; \pm 1 ; \pm 2 ; \pm 3 ; \dots$$



1. Al argumento de z , $\operatorname{Arg}(z)$, también se le denomina amplitud.
2. El argumento es el ángulo generado por el radio vector al girar en sentido antihorario desde el eje real positivo hacia un punto cualquiera del radio vector.

Ejemplo 1



Hallar la forma polar o trigonométrica de $z_1 = 1 + i$

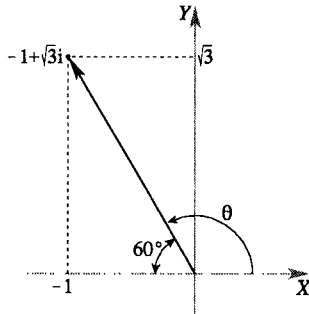
Resolución:

$$|z_1| = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{Tg} \theta = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

Luego $z_1 = 1+i = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$

Ejemplo 2



Si $z = -1 + \sqrt{3}i$

Entonces

$$|z| = 2$$

$$\operatorname{Tg} \theta = \frac{\sqrt{3}}{-1} \Rightarrow \theta = 120^\circ$$

Luego

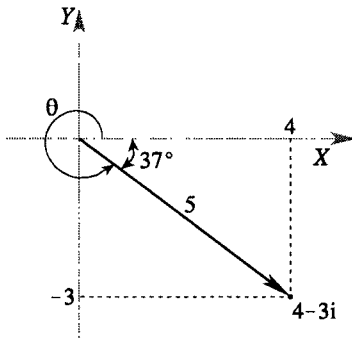
$$z = -1 + \sqrt{3}i = 2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$$

NOTA:

Para calcular el argumento principal de z se debe observar en qué cuadrante se encuentra el afijo de z y luego calculamos a partir de

$$\operatorname{Tg} \theta = \frac{b}{a}$$

Ejemplo 3



Representar en forma polar $z_1 = 4 - 3i$

Se observa que $\theta \in \text{IV}$

$$|z_1| = 5$$

$$\operatorname{Tg} \theta = -\frac{3}{4} \Rightarrow \theta = 323^\circ$$

Luego $z_1 = 4 - 3i = 5(\cos 323^\circ + i \sin 323^\circ)$

NOTA:

También se puede definir el argumento principal en el intervalo $[-\pi; \pi]$, es decir, $-\pi < \theta \leq \pi$; por ello no debe ser extraño si consideramos en algunos problemas.

TEOREMA

Dados los números complejos no nulos

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$w = |w|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

Se verifican

$$1. \quad zw = |z| |w| (\cos(\theta + \alpha) + i \sin(\theta + \alpha))$$

$$2. \quad \frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} (\cos(\theta - \alpha) + i \sin(\theta - \alpha))$$

Demostración

$$1. \quad zw = |z| \cdot |w| (\cos \theta + i \sin \theta) (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$= |z| |w| [(\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha) + i(\cos \theta \sin \alpha + \sin \theta \cos \alpha)]$$

$$= |z| |w| [\cos(\theta + \alpha) + i \sin(\theta + \alpha)]$$

$$2. \quad \frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \cdot \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \alpha + i \sin \alpha}$$

$$= \frac{|z|}{|w|} \frac{(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \alpha - i \sin \alpha)}{(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \alpha - i \sin \alpha)}$$

$$= \frac{|z|}{|w|} \left[\frac{(\cos \theta \cos \alpha - i \sin \theta \cos \alpha + i \cos \theta \sin \alpha - i^2 \sin \theta \sin \alpha)}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} \right]$$

$$= \frac{|z|}{|w|} \left[\frac{(\cos \theta \cos \alpha - i \sin \theta \cos \alpha + i \cos \theta \sin \alpha + \sin \theta \sin \alpha)}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} \right]$$

$$= \frac{|z|}{|w|} [(\cos\theta\cos\alpha + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha) + i(\operatorname{sen}\theta\cos\alpha - \cos\theta\operatorname{sen}\alpha)]$$

$$= \frac{|z|}{|w|} [\cos(\theta - \alpha) + i\operatorname{sen}(\theta - \alpha)]$$

CONCLUSIÓN:

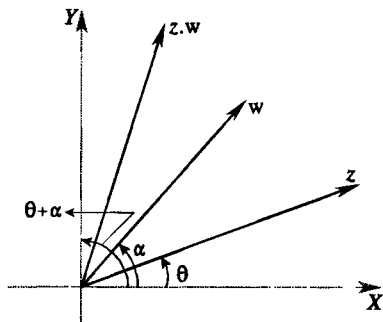
1. Para multiplicar complejos en la forma polar se multiplica los módulos y se suma los argumentos.

$$\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$$

2. Para dividir complejo en la forma polar se dividen los módulos y se resta los argumentos.

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)$$

Gráficamente para (1):



Ejemplo:

Dados $z = -3 + \sqrt{3}i$; $w = 1 + i$

Hallar $z \cdot w$; $\frac{z}{w}$ y representar gráficamente.

Resolución:

$$|z| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\operatorname{Arg}(z) = 5\pi/6$$

Entonces $z = 2\sqrt{3}(\cos 5\pi/6 + i\operatorname{sen} 5\pi/6)$

También $|w| = \sqrt{2}$; $\operatorname{Arg}(w) = \pi/4$

Entonces $w = \sqrt{2}(\cos \pi/4 + i\operatorname{sen} \pi/4)$

Como nos piden el producto y el cociente; de z , w ; hallaremos los argumentos:

$$\operatorname{Arg}(z \cdot w) = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{12}$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$$

Luego

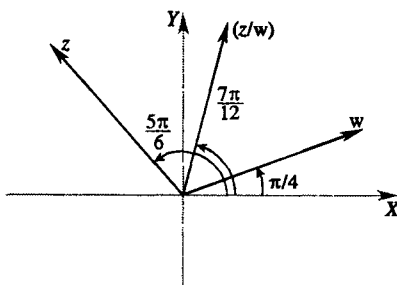
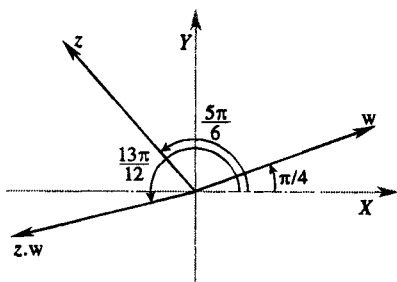
$$z \cdot w = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \left(\cos \frac{13\pi}{12} + i\operatorname{sen} \frac{13\pi}{12} \right)$$

$$= 2\sqrt{6} \left(\cos \frac{13\pi}{12} + i\operatorname{sen} \frac{13\pi}{12} \right)$$

$$\frac{z}{w} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i\operatorname{sen} \frac{7\pi}{12} \right)$$

$$= \sqrt{6} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i\operatorname{sen} \frac{7\pi}{12} \right)$$

Grificando los argumentos de $z \cdot w$ y $\frac{z}{w}$



TEOREMA (de De Moivre)

Dados $z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$; $z \neq (0; 0) \wedge n \in \mathbb{N}$;

se tiene $z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta)$

Corolario:

$$\arg(z^n) = n\arg(z) ; n \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo 1

Hallar el argumento de $z = \frac{(1+\sqrt{3}i)^3}{2i} \cdot \frac{(1+i)^5}{(\sqrt{3}+i)^2}$

Resolución:

$$\arg(z) = \arg\left(\frac{(1+\sqrt{3}i)^3}{2i}\right) + \arg\left(\frac{(1+i)^5}{(\sqrt{3}+i)^2}\right)$$

$$\arg(z) = 3\arg(1+\sqrt{3}i) - \arg(2i) + 5\arg(1+i) - 2\arg(\sqrt{3}+i)$$

$$\arg(z) = 3\left(\frac{\pi}{3}\right) - \left(\frac{\pi}{2}\right) + 5\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{17\pi}{12}$$

$$\therefore \arg(z) = \frac{17\pi}{12}$$

Ejemplo 2

Demostrar $\operatorname{Sen} 2\theta = 2\operatorname{Sen}\theta\operatorname{Cos}\theta$
 $\operatorname{Cos} 2\theta = \operatorname{Cos}^2\theta - \operatorname{Sen}^2\theta$

Demostración:

Sabemos

$$(\operatorname{Cos}\theta + i\operatorname{Sen}\theta)^2 = \operatorname{Cos} 2\theta + i\operatorname{Sen} 2\theta \dots$$

..... (Por T. de De Moivre)

Efectuando en el primer miembro

$$\underbrace{\operatorname{Cos}^2\theta - \operatorname{Sen}^2\theta}_{\text{parte real}} + \underbrace{2\operatorname{Sen}\theta\operatorname{Cos}\theta}_{\text{parte imaginaria}} = \operatorname{Cos} 2\theta + i\operatorname{Sen} 2\theta$$

Igualando las partes real e imaginaria tenemos

$$\operatorname{Cos} 2\theta = \operatorname{Cos}^2\theta - \operatorname{Sen}^2\theta$$

$$\operatorname{Sen} 2\theta = 2\operatorname{Sen}\theta\operatorname{Cos}\theta$$

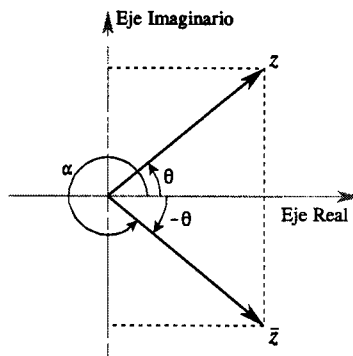
Ejemplo 3:

Sea $z = |z|(\operatorname{Cos}\theta + i\operatorname{Sen}\theta)$

Hallar el argumento de su conjugada.

Resolución:

Representando z geoméricamente



De la figura $\alpha = 2\pi - \theta \Rightarrow \operatorname{Arg}(\bar{z}) = 2\pi - \theta$

También podemos considerar $(-\theta)$

Entonces $\operatorname{Arg}(\bar{z}) = -\theta$

Ejemplo 4

Reducir $z = (1+\sqrt{3}i)^{30} + (1-\sqrt{3}i)^{30}$

Resolución:

$$1 + \sqrt{3}i = 2(\operatorname{Cos} 60^\circ + i\operatorname{Sen} 60^\circ)$$

$$1 - \sqrt{3}i = 2(\operatorname{Cos}(-60^\circ) + i\operatorname{Sen}(-60^\circ))$$

$$= 2(\operatorname{Cos} 60^\circ - i\operatorname{Sen} 60^\circ)$$

Luego

$$z = \left[2 \left(\operatorname{Cos} \frac{\pi}{3} + i\operatorname{Sen} \frac{\pi}{3} \right) \right]^{30} + \left[2 \left(\operatorname{Cos} \frac{\pi}{3} - i\operatorname{Sen} \frac{\pi}{3} \right) \right]^{30}$$

$$z = \left[2^{30} \left(\operatorname{Cos} 30 \frac{\pi}{3} + i\operatorname{Sen} 30 \frac{\pi}{3} \right) \right] + \left[2^{30} \left(\operatorname{Cos} 30 \frac{\pi}{3} - i\operatorname{Sen} 30 \frac{\pi}{3} \right) \right]$$

$$z = 2^{30}(\operatorname{Cos} 10\pi + i\operatorname{Sen} 10\pi) + 2^{30}(\operatorname{Cos} 10\pi - i\operatorname{Sen} 10\pi)$$

$$= 2^{30}(2\operatorname{Cos} 10\pi)$$

$$= 2^{31}$$

$$\therefore z = 2^{31}$$

FORMA EXPONENCIAL DE UN NÚMERO COMPLEJO

TEOREMA DE EULER

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{Sen}\theta$$

Donde: e es la base del logaritmo neperiano
 θ argumento en radianes ; $i = (0;1)$

La demostración la realizaremos en el siguiente tomo; ya que todavía no tenemos elementos necesarios.

Entonces tenemos una nueva representación para el complejo.

$$z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{Sen}\theta) = |z|e^{i\theta}$$

$$\therefore z = |z|e^{i\theta} \dots\dots\dots (*)$$

Ejemplo 1

Representar en forma exponencial al complejo

$$z = 4 + 4\sqrt{3}i$$

Resolución:

$$z = 4 + 4\sqrt{3}i = 8(\cos\pi/3 + i\operatorname{Sen}\pi/3) = 8e^{i\pi/3}$$

$$\therefore z = 8e^{i\pi/3}$$

NOTA

Conociendo el complejo $z = |z|e^{i\theta}$; podemos hallar la representación exponencial de su conjugado sólo reemplazando θ por $(-\theta)$.

$$\bar{z} = |z|e^{-i\theta}$$

Ejemplo 2

Sabiendo que $z = x + yi$

Hallar el módulo y el argumento de e^z

Resolución:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i\operatorname{Sen} y)$$

$$\therefore |e^z| = e^x ; \operatorname{Arg}(e^z) = y$$

$$e^x > 0 ; \forall x \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 3

Calcular i^i ; $i = \sqrt{-1}$

Resolución:

Partimos expresando en forma polar el complejo

$$i = 0 + i = (1) \left(\cos \frac{\pi}{2} + i\operatorname{Sen} \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{Luego } i = \cos \frac{\pi}{2} + i\operatorname{Sen} \frac{\pi}{2} = e^{i\pi/2}$$

$$\text{Se pide } i^i = (e^{i\pi/2})^i = e^{\frac{\pi}{2} i^2} = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$\therefore i^i = e^{-\pi/2}$$

NOTA

Del teorema de Euler se tiene

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{Sen}\theta \dots\dots\dots (I)$$

$$e^{i(-\theta)} = \cos\theta - i\operatorname{Sen}\theta \dots\dots\dots (II)$$

Al sumar (I) y (II) se obtiene $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$

de donde $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \dots\dots (*)$

Al restar (I) - (II) se obtiene

$$\operatorname{Sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \dots\dots (**)$$

Si en dichas fórmulas reemplazamos θ por z ; obtenemos algo más general

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} ; z \in \mathbb{C}$$

$$\operatorname{Sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} ; z \in \mathbb{C}$$

REPRESENTACIÓN CIS

Es usada para representar en forma abreviada a un complejo en su forma polar. Así

$$z = |z| (\cos\theta + i\operatorname{Sen}\theta) = |z| \operatorname{Cis}\theta$$

Ejemplos:

$$z_1 = 2(\cos 12^\circ + i\operatorname{Sen} 12^\circ) = 2\operatorname{Cis} 12^\circ$$

$$z_2 = 2(\cos(\theta + 2k\pi) + i\operatorname{Sen}(\theta + 2k\pi)) \\ = 2\operatorname{Cis}(\theta + 2k\pi)$$

TEOREMA DE MOIVRE

Sea el número complejo: $z = |z| e^{i\theta}$;
se cumple:

Forma exponencial:

$$z^n = |z|^n e^{in\theta}$$

Forma polar:

$$z^n = |z|^n (\cos n\theta + i \operatorname{Sen} n\theta)$$

Representación CIS

$$z^n = |z|^n \operatorname{Cis}(n\theta)$$

Forma fasorial

$$z^n = |z|^n \angle n\theta$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}$$

Demostración:

La demostración queda a cargo del lector.

Ejemplo

Efectuar

$$z = \frac{\sqrt{2}(\cos 13^\circ + i \operatorname{Sen} 13^\circ) [2\sqrt{2}(\cos 67^\circ + i \operatorname{Sen} 67^\circ)]}{4[\cos 16^\circ + i \operatorname{Sen} 16^\circ][\cos 19^\circ + i \operatorname{Sen} 19^\circ]}$$

Resolución:

Representando fasorialmente

$$z = \frac{\cancel{\sqrt{2}} \angle 13^\circ \cdot \cancel{2\sqrt{2}} \angle 67^\circ}{4 \angle 16^\circ \cdot \angle 19^\circ} = \frac{\angle 13 + 67^\circ}{\angle 16^\circ + 19^\circ} = \frac{\angle 80^\circ}{\angle 35^\circ} = \angle 45^\circ$$

Luego

$$z = \cos 45^\circ + i \operatorname{Sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

$$\therefore z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

RAÍZ N-ÉSIMA - RAÍCES DE LA UNIDAD

El problema de obtener una raíz n -ésima de cualquier número real o complejo se resuelve satisfactoriamente con la teoría de números complejos.

Definición:

Dados $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, se llama raíz n -ésima de z a un número $w \in \mathbb{C}$, tal que $w^n = z$

TEOREMA

Para todo $z \in \mathbb{C}$ y todo $n \in \mathbb{N} - \{1\}$; existen n raíces (n -ésimas) de z

Demostración:

Sea $z = |z|e^{i\theta} = |z|(\cos\theta + i\operatorname{Sen}\theta)$

Deseamos calcular

$w = |w|e^{i\alpha} = |w|(\cos\alpha + i\operatorname{Sen}\alpha)$, tal que $w^n = z$

Es decir

$$[|w|e^{i\alpha}]^n = |z|e^{i\theta} \Rightarrow |w|^n e^{in\alpha} = |z|e^{i\theta}$$

Equivalentemente

$$|w|^n (\cos n\alpha + i\operatorname{Sen} n\alpha) = |z| (\cos \theta + i\operatorname{Sen} \theta)$$

Igualando partes real e imaginaria

$$|w|^n = |z| \wedge [\cos n\alpha = \cos \theta, \operatorname{Sen} n\alpha = \operatorname{Sen} \theta]$$

De donde obtenemos

$$|w| = \sqrt[n]{|z|} \text{ y } n\alpha = \theta + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}; k \in \mathbb{Z}$$

Luego las raíces n -ésimas son

$$W_k = \sqrt[n]{|z|} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{Sen} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right]$$

$$= \sqrt[n]{|z|} \operatorname{Cis} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right);$$

$$k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots$$

Estas raíces no son todas distintas pues

$$W_n = W_0; W_{n+1} = W_1; \dots; W_{n+1} = W_1$$

Es decir $W_{n+1} = W_1; \dots; W_j = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$

Luego las raíces n -ésimas distintas son

$$W_0; W_1; W_2; \dots; W_{n-1}$$

Por ello cuando se resuelve un problema de raíz n -ésima es suficiente tomar los valores de

$$k = 0; 1; 2; 3; \dots; (n-1)$$

Ejemplo 1

Hallar las tres raíces cúbicas de $8i$

Resolución:

$$\text{Sea } z = 8i = 0 + 8i = 8\operatorname{Cis}(\pi/2)$$

$$\Rightarrow z^{1/3} = \sqrt[3]{8} \cdot \operatorname{Cis} \left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right) = 2 \operatorname{Cis} \left(\frac{\pi + 4k\pi}{6} \right)$$

Donde $K = 0; 1; 2$

$$\text{Si } K=0; \quad z_0 = 2 \operatorname{Cis} \frac{\pi}{6} = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} + i$$

$$\Rightarrow z_0 = \sqrt{3} + i$$

$$\text{Si } K=1; \quad z_1 = 2 \operatorname{Cis} \pi/6 = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

$$\Rightarrow z_1 = -\sqrt{3} + i$$

$$\text{Si } K=2; \quad z_2 = 2 \operatorname{Cis} 3\pi/2 = 2(-i) = -2i$$

$$\Rightarrow z_2 = -2i$$

\therefore Las raíces cúbicas de $8i$ son los siguientes valores $\sqrt{3} + i; -\sqrt{3} + i; -2i$

Ejemplo 2

Hallar las tres raíces cúbicas de $z = 1 + i$

Resolución:

$$z = 1 + i \begin{cases} \nearrow \operatorname{Arg}(z) = \pi/4 \\ \searrow |z| = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = 1 + i = \sqrt{2} (\operatorname{Cis} \pi/4 + i \operatorname{Sen} \pi/4)$$

Luego las raíces cúbicas de $z=1+i$ son

$$W_K = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \left[\cos \left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} \right) + \operatorname{Sen} \left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} \right) \right]$$

$K = 0; 1; 2$

para $K = 0$;

$$\begin{aligned} W_0 &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \operatorname{Sen} \frac{\pi}{12} \right) \\ &= \sqrt[6]{2} (\cos 15^\circ + i \operatorname{Sen} 15^\circ) \\ &= \sqrt[6]{2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{2+\sqrt{3}} + i \frac{1}{2} \sqrt{2-\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

para $K = 1$;

$$\begin{aligned} W_1 &= \sqrt[6]{2} [\cos(15^\circ + 120^\circ) + i \operatorname{Sen}(15^\circ + 120^\circ)] \\ &= \sqrt[6]{2} (\cos 135^\circ + i \operatorname{Sen} 135^\circ) \end{aligned}$$

$$= \sqrt[6]{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right)$$

para $K=2$;

$$\begin{aligned} W_2 &= \sqrt[6]{2} [\cos(15^\circ + 240^\circ) + i \operatorname{Sen}(15^\circ + 240^\circ)] \\ &= \sqrt[6]{2} (\cos 255^\circ + i \operatorname{Sen} 255^\circ) \\ &= \sqrt[6]{2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{2-\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \sqrt{2+\sqrt{3}} i \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto las 3 raíces cúbicas son

$$\begin{aligned} &\sqrt[6]{2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{2+\sqrt{3}} + i \frac{1}{2} \sqrt{2-\sqrt{3}} \right); \\ &\sqrt[6]{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right); \\ &\sqrt[6]{2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{2-\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \sqrt{2+\sqrt{3}} i \right) \end{aligned}$$

RAÍCES CÚBICAS DE LA UNIDAD REAL

Sea el complejo $z=1$

Como se desea calcular la raíz cúbica; entonces lo expresamos en forma polar

$$z = 1 = 1 + 0i = \cos 0^\circ + i \operatorname{Sen} 0^\circ$$

Luego la raíz cúbica es

$$\begin{aligned} z_K &= \cos \left(\frac{0^\circ + 2k\pi}{3} \right) + i \operatorname{Sen} \left(\frac{0^\circ + 2k\pi}{3} \right) \\ &= \cos \left(\frac{2k\pi}{3} \right) + i \operatorname{Sen} \left(\frac{2k\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

Donde $K = 0; 1; 2$

Para $K = 0$

$$z_0 = \cos 0^\circ + i \operatorname{Sen} 0^\circ = 1$$

Para: $K=1$:

$$z_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{Sen} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Para: $K=2$:

$$z_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{Sen} \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

CONCLUSIÓN:

Las raíces cúbicas de la unidad real son:

$$1; \underbrace{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i}_{\text{conjugados}}$$

Donde si asumimos por w al número $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)$

Las raíces cúbicas de 1 son: 1, w , w^2 es decir

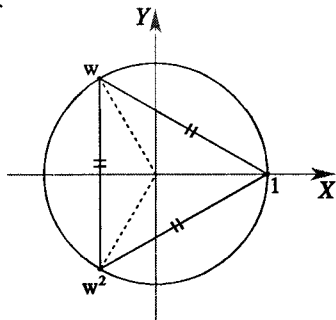
$$\sqrt[3]{1} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = w \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = w^2 \end{cases}$$

NOTA:

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Se observa que las tres raíces cúbicas de la unidad tienen el mismo módulo; por lo tanto sus afijos estarán en el borde de una circunferencia de radio igual al módulo. En este caso el módulo es igual a la unidad.



En la figura se observa que los afijos de 1 ; w ; w^2 son los vértices de un triángulo equilátero.

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES CÚBICAS DE LA UNIDAD

1. Sabemos que w es una raíz cúbica de unidad; entonces se cumple $w^3 = 1$. Luego podemos afirmar

$$w^{3K} = 1 \quad \text{ó} \quad w^{\pm 3K} = 1; \quad \forall K \in \mathbb{N}$$

Entonces

$$w^{3K+r} = w^r; \quad r \in \mathbb{Z}$$

Luego

$$w^{3K+1} = w; \quad w^{3K+2} = w^2$$

2. Si sumamos las tres raíces cúbicas 1 ; w ; w^2 ; tenemos

$$1 + w + w^2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$$

$$\Rightarrow 1 + w + w^2 = 0$$

CONCLUSIÓN:

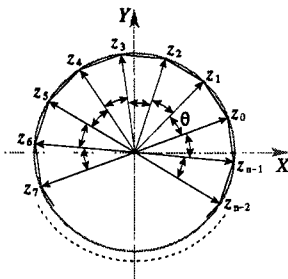
$$\forall k; r \in \mathbb{Z}$$

- I. $w^3 = 1$
- II. $w^{3k} = 1$; $w^{3k+1} = w$; $w^{3k+2} = w^2$
- III. $w^{3k+r} = w^r$
- IV. $1 + w + w^2 = 0$

TEOREMA

Los afijos de las raíces n -ésimas de un número complejo son los vértices de un polígono regular de n lados.

Sean: z_0 ; z_1 ; z_2 ; z_3 ;; z_{n-1} ; las n -raíces (n -ésimas) de z .



Del gráfico se observa: $\theta = \left(\frac{2\pi}{n} \right)$

Luego el área del polígono regular de n lados es:

$$S = \frac{n|z_0|^2}{2} \cdot \text{Sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right) \mu^2$$

Donde z_0 es una de las raíces (n -ésima) de z

También se cumple:

$$\text{I. } z_0^n = z_1^n = z_2^n = \dots = z_{n-1}^n = z$$

$$\text{II. } z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1} = 0$$

¡IMPORTANTE!

Las raíces n -ésimas de la unidad tienen propiedades importantes que merecen especial atención.

Si w_1 ; w son las raíces n -ésimas de la unidad; entonces w ; w^2 ; w^3 ; son raíces n -ésimas de la unidad en particular w ; w^2 ; w^3 ;

Son raíces n -ésimas de la unidad

Si $w^{n-1} \neq 1$; se dice que w es una raíz primitiva de la unidad.

$$w_1 = \cos \frac{2\pi}{n} - i \sin \frac{2\pi}{n};$$

Existen otras raíces primitivas; las cuales son

$$w_k = \cos \frac{2k\pi}{n} - i \sin \frac{2k\pi}{n};$$

$k < n$ y k es coprimo con n

Ejemplo 1

Las raíces cuadradas de la unidad real son 1; -1; donde -1 es raíz primitiva.

Ejemplo 2

Las raíces cúbicas de la unidad real son

$$1; w; w^2$$

$$w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; w^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

Donde $w; w^2$ son raíces primitivas.

Ejemplo 3 (para el lector)

Probar que $i; -i$ son las raíces cuartas primitivas de la unidad real.

Ejemplo 4

Dado $z = 2$, hallar

a. $(z^{1/6})^3$

b. $(z^3)^{1/6}$

Resolución:

a. $z = 2 = 2(\text{Cis}0^\circ)$

$$\Rightarrow z^{1/6} = \sqrt[6]{2} \text{ Cis} \left(\frac{0^\circ + 2k\pi}{6} \right)$$

$$= \sqrt[6]{2} \text{ Cis} \frac{k\pi}{3}; k = 0; 1; 2; \dots, 5$$

Para $k=0; z_0 = \sqrt[6]{2}$

Para $k=1; z_1 = \sqrt[6]{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$

Para $k=2; z_2 = \sqrt[6]{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$

Para $k=3; z_3 = \sqrt[6]{2}$

Para $k=4; z_4 = \sqrt[6]{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$

Para $k=5; z_5 = \sqrt[6]{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$

Pero se desea calcular $(z^{1/6})^3$ elevamos al cubo cada una de las raíces:

$$z_0^3 = \sqrt{2}; \quad z_1^3 = -\sqrt{2}$$

$$z_2^3 = \sqrt{2}; \quad z_3^3 = -\sqrt{2}$$

$$z_4^3 = \sqrt{2}; \quad z_5^3 = -\sqrt{2}$$

Como se observa, se repiten los valores, los cuales deben ser considerados una sola vez.

$$\therefore (z^{1/6})^3 = \pm \sqrt{2}.$$

b. $z = 2 = 2\text{Cis}0^\circ \Rightarrow z^3 = 8 = 8\text{Cis}0^\circ$

Luego

$$(z^3)^{1/6} = \sqrt[6]{8} \text{ Cis} \left(\frac{0^\circ + 2k\pi}{6} \right)$$

$$= \sqrt{2} \text{ Cis} \frac{k\pi}{3}; k = 0; 1; 2; \dots, 5$$

Si

$$k=0; z_0 = \sqrt{2}$$

$$k=1; z_1 = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

$$k=2; z_2 = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

$$k=3; z_3 = -\sqrt{2}$$

$$k=4; z_4 = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

$$k=5; z_5 = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

$$\therefore (z^{1/6})^3 = (z^3)^{1/6}$$

Problemas Resueltos

Problema 1

Sea el complejo $z = 1+i$

Calcular z^{12}

Resolución:

Del dato $z = 1+i$

Realizando la sentencia solicitada

$$\begin{aligned} z^{12} &= (1+i)^{12} \\ &= [(1+i)^2]^6 \\ &= [1+2i+i^2]^6 ; i^2 = -1 \\ &= (2i)^6 = 2^6 i^6 = 64(-1) = -64 \end{aligned}$$

$$\therefore z^{12} = -64$$

Problema 2

Calcular el valor más simple de

$$N = \frac{(1+i)^2(1+3i)}{i-3} \text{ donde } i=(0;1)$$

Resolución:

Nota: $(1+i)^2 = 2i$

En la expresión multiplicando por (i) al numerador y denominador tenemos:

$$\begin{aligned} N &= \frac{(1+i)^2(1+3i)}{i-3} = \frac{2i(1+3i)(i)}{(i-3)i} = \frac{2(i-3)}{i-3} = 2 \\ \therefore N &= 2 \end{aligned}$$

Problema 3

Simplificar la expresión

$$\frac{(a^2+ab+a)i-a-b-1}{(a+b+1)i} ; a+b \neq -1$$

Resolución:

Agrupando la parte real y la parte imaginaria

$$z = \frac{a(a+b+1)i - (a+b+1)}{(a+b+1)i}$$

Simplificando tenemos

$$z = \frac{ai-1}{i} = \frac{(ai-1)i}{i^2} = \frac{ai^2-i}{-1} = i+a$$

$$\therefore z = a+i$$

Problema 4

Efectuar

$$W = \frac{1-i}{1 - \frac{1-i}{1 - \frac{1-i}{1 - \frac{1-i}{1+i}}}}$$

Resolución:

Recordar

$$\frac{1-i}{1+i} = -i$$

Entonces

$$\therefore W = -i$$

Problema 5

Si k es un entero no negativo; calcular el valor

de $\left[\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right]^{4k+6}$.

Resolución:

Dato $k \in \mathbb{Z}_0^+$

Entonces

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^{4k+6} &= \left[\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^2 \right]^{2k+3} = \left(\frac{2i}{2} \right)^{2k+3} = i^{2k+3} \\ &= (i^2)^{k+1} \cdot i = (-1)^{k+1} i \end{aligned}$$

\therefore El equivalente de la expresión es: $(-1)^{k+1} i$

Problema 6

Encontrar un valor de

$$\sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{i+\sqrt[5]{i}}}}$$

Resolución:

Partimos calculando un valor de $\sqrt[5]{i}$; para ello sabemos que $i^5 = i \Rightarrow$ un valor de $\sqrt[5]{i} = i$ pues $i^5 = i$

Además $(1+i)^2 = 2i$; sustituyendo en la expresión

$$\begin{aligned}\sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{i+\sqrt[5]{i}}}} &= \sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{i+i}}} \\ &= \sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{2i}}} = \sqrt{2\sqrt{i-(1+i)}} \\ &= \sqrt{2\sqrt{-1}} = \sqrt{2i} = 1+i\end{aligned}$$

\therefore Un valor es: $1+i$

Problema 7

Hallar los números complejos z que satisfacen

$$\left| \frac{1+z}{1-z} \right| = 1$$

Resolución:

Sea $z = a+bi$; reemplazando en la igualdad

$$\left| \frac{1+a+bi}{1-a-bi} \right| = 1$$

$$\Rightarrow |1+a+bi| = |1-a-bi|$$

$$\Rightarrow \sqrt{(1+a)^2 + b^2} = \sqrt{(1-a)^2 + (-b)^2}$$

$$\Rightarrow (1+a)^2 + b^2 = (1-a)^2 + b^2$$

$$\Rightarrow 1+2a+a^2 = 1-2a+a^2$$

$$\Rightarrow 4a=0 \Rightarrow a=0$$

Luego $z = a+bi = 0+bi = bi$

\therefore Los números complejos que satisfacen son todos los imaginarios puros y el nulo.

Problema 8

Calcular los valores de x ; y reales que verifican la siguiente igualdad de complejos

$$\frac{xi}{1+yi} = \frac{3x+4i}{x+3y}$$

Resolución:

Efectuando tenemos

$$(xi)(x+3y) = (1+yi)(3x+4i)$$

Aplicando la propiedad distributiva

$$\underbrace{0 + (x^2+3xy)i}_{\uparrow} = \underbrace{(3x-4y) + (4+3xy)i}_{\uparrow}$$

$$\Rightarrow 3x-4y = 0 \wedge x^2+3xy = 4+3xy$$

$$\Rightarrow 3x = 4y \wedge x^2 = 4$$

De $x^2=4$ se obtiene $x = \pm 2$

Reemplazando los valores de x en $(3x = 4y)$ se obtiene $y = \pm 3/2$

$$\therefore x = \pm 2 \wedge y = \pm 3/2$$

Problema 9

$$\text{Si } A = \frac{\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{3} - \frac{a}{3i}\right)(i+3+a)}{\left(-1 + \frac{1}{9} + \frac{2}{3i}\right) + \frac{a^2}{9}}$$

donde $i = \sqrt{-1}$; calcular $A^4 + 1$

Resolución:

Se observa la unidad imaginaria en el denominador; por ello utilizamos la equivalencia

$$\frac{1}{i} = -i \dots\dots\dots (1)$$

Entonces

$$A = \frac{\left(-i + \frac{1}{3} + \frac{a}{3}i\right)(i+3+a)}{-\frac{8}{9} - \frac{2}{3}i + \frac{a^2}{9}}$$

$$A = \frac{\frac{1}{3}(a-3-i)(a+3+i)}{\frac{1}{9}(a^2-8-6i)}$$

Efectuando en el numerador

$$A = \frac{3i((a^2 - 8) - 6i)}{(a^2 - 8) - 6i} = 3i$$

$$\therefore A^4 + 1 = (3i)^4 + 1 = 82$$

Problema 10

Hallar z tal que

- Sea conjugado con su cuadrado
- Sea conjugado con su inversa

Resolución:

- De la condición del problema $z^2 = \bar{z}$

$$\text{Sea } z = a + bi \Rightarrow (a + bi)^2 = a - bi$$

$$\Rightarrow \underbrace{(a^2 - b^2)}_{(I)} + \underbrace{2abi}_{(II)} = a - bi$$

$$\underbrace{a^2 - b^2 = a}_{(I)} \quad \wedge \quad \underbrace{2ab = b}_{(II)}$$

$$\text{De (II) se obtiene } b=0 \vee a = -\frac{1}{2}$$

Para $b=0$ en (I)

$$a^2 = a \Rightarrow a(a-1) = 0 \Rightarrow a=0 \vee a=1$$

Luego

$$z_1 = 0 + 0i = 0 \vee z_2 = 1 + 0i = 1$$

Para $a = -\frac{1}{2}$ en (I)

$$\frac{1}{4} - b^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow b^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Luego

$$z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \wedge \quad z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Conclusión: Existen cuatro números complejos que verifican la igualdad y ellos son:

$$z_1 = 0 \quad ; \quad z_2 = 1$$

$$z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad ; \quad z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

- Condición del problema

$$\bar{z} = \frac{1}{z} \dots (I)$$

$$\text{Si } \bar{z} = \frac{1}{z} \Rightarrow z \cdot \bar{z} = 1$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$$

Conclusión: Dicha condición se verifica
 $\forall z \in \mathbb{C}$ de módulo igual a la unidad.

Problema 11

Hallar el valor de w si

$$W = \frac{\operatorname{Im}\left(\frac{w_1}{w_1 + w_2}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{w_2}{w_1 + w_2}\right)}{\operatorname{Re}\left(\frac{w_1}{w_1 + w_2}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{w_2}{w_1 + w_2}\right)}$$

$$\forall w_1 \neq -w_2 \quad ; \quad w_1, w_2 \in \mathbb{C}$$

Resolución:

Para resolver este problema se plantea el siguiente análisis:

$$\text{Sea } z_1 = a + bi \quad \wedge \quad z_2 = c + di$$

$$\Rightarrow z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i$$

Luego

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = a + c = \operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2)$$

$$\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = b + d = \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2)$$

En el problema

$$\frac{w_1 + w_2}{w_1 + w_2} = \frac{w_1}{w_1 + w_2} + \frac{w_2}{w_1 + w_2}$$

$$1 + 0i = \frac{w_1}{w_1 + w_2} + \frac{w_2}{w_1 + w_2}$$

Entonces

$$\operatorname{Re}\left(\frac{w_1}{w_1 + w_2}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{w_2}{w_1 + w_2}\right) = 1 ;$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{w_1}{w_1 + w_2}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{w_2}{w_1 + w_2}\right) = 0$$

$$\therefore w = 0$$

Problema 12

Simplificar

$$z = \left[\left[\left(\frac{3+i}{2-i} \right)^i \right]^2 \right]^{i^3}$$

Resolución:

Efectuando la potencia de potencia tenemos

$$z = \left(\frac{3+i}{2-i} \right)^{2i^4} = \left(\frac{3+i}{2-i} \right)^2$$

$$\Rightarrow z = \left[\frac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} \right]^2 = \left(\frac{5+5i}{5} \right)^2 = (1+i)^2 = 2i$$

$$\therefore z = 2i$$

Problema 13Calcular $\operatorname{Re}(e^{iz^n})$ si $z = \cos\phi + i \operatorname{Sen}\phi \wedge n \in \mathbb{Z}$ **Resolución:**

Por la fórmula de Moivre

$$z^n = \cos n\phi + i \operatorname{Sen} n\phi$$

Luego

$$e^{iz^n} = e^{i(\cos n\phi + i \operatorname{Sen} n\phi)} = e^{i \cos n\phi - \operatorname{Sen} n\phi}$$

$$= e^{-\operatorname{Sen} n\phi} \cdot e^{i \cos n\phi}$$

$$= e^{-\operatorname{Sen} n\phi} [\cos(\cos n\phi) + i \operatorname{Sen}(\cos n\phi)]$$

$$\therefore \operatorname{Re}(e^{iz^n}) = e^{-\operatorname{Sen} n\phi} [\cos(\cos n\phi)]$$

Problema 14Sea $z = i$; hallar: a) $(z^{1/2})^3$

$$b) (z^3)^{1/2}$$

Resolución:a) Al complejo z lo representamos en forma exponencial

$$|z| = 1 \wedge \operatorname{Arg}(z) = \pi/2$$

$$\Rightarrow z = i = e^{i\pi/2}$$

$$\text{Luego } z^{1/2} = e^{i\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{2}\right)}$$

$$\text{Donde } K = 0; 1$$

$$\text{Para } K = 0: z_1 = e^{i\pi/4}$$

$$\text{Para } K = 1: z_2 = e^{i5\pi/4}$$

$$\text{Luego } z_1^3 = e^{i3\pi/4}; z_2^3 = e^{i15\pi/4} = e^{i7\pi/4}$$

b) Para el lector.

Problema 15

Determine aquel número "n" entero positivo múltiplo de cuatro que verifica la igualdad:

 $i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + \dots + ni^n = 64 - 64i$, tal que $i = (0; 1)$ **Resolución:**

De la condición

$$\underbrace{i + 2i^3 + 3i^3 + 4i^4 + \dots + ni^n}_{m} = 64(1-i)$$

$$\Rightarrow m = i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + \dots + ni^n \dots \dots \dots (I)$$

Multiplicando por i

$$im = i^2 + 2i^3 + 3i^4 + 4i^5 + \dots + ni^{n+1} \dots \dots (II)$$

Luego (I)-(II)

$$(1-i)m = \underbrace{i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^n}_{0} - ni^{n+1}$$

$$\text{Como } n = 4$$

$$\text{Tenemos } (1-i)m = -ni \Rightarrow m = \frac{-ni}{1-i}$$

Reemplazando el valor de m en la condición

$$\frac{-ni}{1-i} = 64(1-i) \Rightarrow -ni = 64(1-i)^2$$

$$\Rightarrow -ni = 64(-2i) \Rightarrow -ni = -128i$$

$$\therefore n = 128$$

Problema 16Los números complejos z y w tienen argumentos que varían de 0 a 2π radianes y además verifican las relaciones

$$|w| = |z|; z + \bar{z} = \sqrt{2}; iz = \bar{z}$$

$$\operatorname{arg}(z) - \operatorname{arg}(w) = 5\pi/3$$

$$\text{Calcular } E = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Re}(w)$$

Resolución:

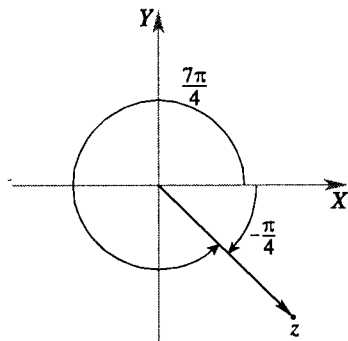
$$\text{Sea } z = |z|e^{i\theta} \Rightarrow \bar{z} = |z|e^{-i\theta};$$

Reemplazando en $iz = \bar{z}$ se tiene

$$i|z|e^{i\theta} = |z|e^{-i\theta}; |z| \neq 0$$

$$\Rightarrow e^{2i\theta} = e^{-i\pi/2} \Rightarrow -2\theta = \pi/2$$

$$\Rightarrow \theta = -\pi/4$$



Pero $\theta \in [0; 2\pi >$

$$\Rightarrow \theta = 7\pi/4$$

$$\therefore \text{Arg}(z) = 7\pi/4$$

Luego calculamos el módulo de z a partir de

$$z + \bar{z} = \sqrt{2}$$

$$|z|(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \sqrt{2}$$

$$|z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta + \cos(-\theta) + i\text{sen}(-\theta)) = \sqrt{2}$$

$$|z|2\cos\theta = \sqrt{2}; \text{ reemplaza el valor de } \theta$$

$$2|z|\cos(7\pi/4) = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 2|z|\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} \Rightarrow |z| = 1$$

Luego $z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Entonces se concluye que $|w|=1$, ya que $|z|=|w|$

Cálculo de arg de w :

Dato $\arg(z) - \arg(w) = 5\pi/3$

Reemplazando el valor de $\arg(z)$

$$\arg(w) = \frac{7\pi}{4} - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{12}$$

$$\Rightarrow w = |w|e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$\Rightarrow w = \cos\frac{\pi}{12} + i\text{sen}\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}i$$

$$\therefore E = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Problema 17

Hallar el mayor número de dos cifras que verifica

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^n = \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}; i = \sqrt{-1}$$

Resolución:

Expresándolo en forma polar a las bases

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos\frac{\pi}{6} + i\text{sen}\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\text{sen}\frac{\pi}{3}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Entonces

$$\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)^n = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$

$$\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) + i\text{sen}\left(n\frac{\pi}{6}\right) = \text{Cis}\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$

$$\text{Cis}\left(n\frac{\pi}{6}\right) = \text{Cis}\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$

$$\Rightarrow n\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow n = 2 + 12k$$

$$\therefore n_{\text{mayor}} = 98$$

Problema 18

Sabiendo que z_1 y z_2 representan un número real y un imaginario puro respectivamente. donde

$$z_1 = \frac{a+b+2i}{a-b-3i} = k; \quad z_2 = \frac{a+(b+8)i}{a-bi} = mi$$

Calcular $a-b$ **Resolución:**

$$1) \underbrace{(a+b)}_{a+b} + 2i = \underbrace{(a-b)}_{a-b} k - \underbrace{3ki}_{-3ki}$$

Efectuando tenemos

$$2) \underbrace{a+(b+8)i}_{a+(b+8)i} = \underbrace{bm+ami}_{bm+ami}$$

De las igualdades se tiene

$$\text{De } 1 \begin{cases} a+b = (a-b)k & \dots\dots\dots (I) \\ 3k = -2 & \dots\dots\dots (II) \end{cases}$$

$$\text{De } 2 \begin{cases} a = bm & \dots\dots\dots (III) \\ (b+8) = am & \dots\dots\dots (IV) \end{cases}$$

$$\text{De (II)} \quad k = -2/3$$

$$\text{En (I)} \quad (a+b) = -\frac{2}{3}(a-b)$$

$$\Leftrightarrow b = -5a \dots\dots\dots (V)$$

De (II) y (IV)

$$\frac{a}{b+8} = \frac{b}{a} ; m \neq 0 \dots\dots\dots (VI)$$

$$\frac{a}{-5a+8} = \frac{-5a}{a} \Leftrightarrow a \neq 0 \wedge a = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow b = -\frac{25}{3}$$

$$\therefore a-b = \frac{30}{3} = 10$$

Si $a = 0 \Rightarrow z_2$ no resulta ser imaginario puro

$$\therefore a \neq 0$$

Problema 19Hallar el argumento principal del complejo z ;

donde

$$z = \frac{\left[1-i + \frac{1}{1+i + \frac{1}{1-i + \frac{1}{1+i + \frac{1}{1-i + \frac{1}{1+i}}}}} \right]}{\left[1+i + \frac{1}{1-i + \frac{1}{1+i + \frac{1}{1-i + \frac{1}{1+i}}}}} \right]}$$

Resolución:Hacemos $z = z_1 \div z_2$

$$\Rightarrow z_1 = 1-i + \frac{1}{z_2} \dots\dots\dots (I)$$

$$z_2 = 1+i + \frac{1}{z_1} \dots\dots\dots (II)$$

$$\text{En (I)} \quad z_1 - \frac{1}{z_2} = 1-i \Leftrightarrow \frac{z_1 z_2 - 1}{z_2} = 1-i \dots\dots (III)$$

$$\text{En (II)} \quad z_2 - \frac{1}{z_1} = 1+i \Leftrightarrow \frac{z_1 z_2 - 1}{z_1} = 1+i \dots\dots (IV)$$

$$(III) \div (IV) \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{1-i}{1+i} = -i \Rightarrow z = \frac{z_1}{z_2} = -i$$

$$\therefore \arg(z) = \frac{3\pi}{2}$$

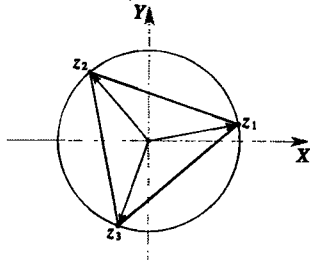
Problema 20Si $z_1; z_2; z_3$ son tales que sus afijos forman un triángulo equilátero y además son las raíces cúbicas de un número complejo.

Calcular

$$E = \frac{z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3}{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}$$

Resolución:

Como los afijos de $z_1; z_2; z_3$ al ser unidos forman un triángulo equilátero y tienen el mismo módulo, entonces se encuentran en el borde de una circunferencia de radio igual al módulo, como se indica en la figura.



De la figura se deduce que

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \quad (\text{ver la radicación de complejos})$$

$$\Rightarrow z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = -2(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)$$

$$\therefore E = -\frac{1}{2}$$

Problema 21

Hallar el área del polígono regular formado al unir los afijos de las raíces cuartas del complejo

$$z = \sqrt{72 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{72 + 2\sqrt{3}}i \quad ; \quad i = \sqrt{-1}$$

Resolución:

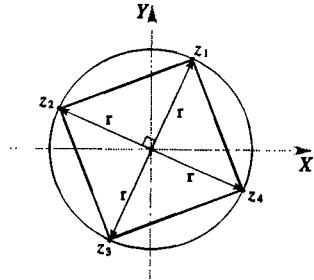
Sea $z_1; z_2; z_3; z_4$ las raíces cuartas de z ; entonces

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = \sqrt[4]{|z|} \quad \dots (\alpha)$$

$$\text{Pero } |z| = \sqrt{\sqrt{72 - 2\sqrt{3}}^2 + \sqrt{72 + 2\sqrt{3}}^2} = 12$$

$$\Rightarrow |z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = \sqrt[4]{12}$$

Además los afijos de $z_1; z_2; z_3; z_4$ se encuentran en la circunferencia de centro $C=(0;0)$ \wedge $r = \sqrt[4]{12}$



De la fig. el diámetro del cuadrado es $2r = 2\sqrt[4]{12}$

Por geometría el área del cuadrado

$$S_T = \left(\frac{2r}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt[4]{12}}{\sqrt{2}}\right)^2 = 4\sqrt{3}\mu^2$$

Problema 22

Si ϕ es una raíz séptima compleja de la unidad real; calcular el valor de M.

$$M = \phi^6 + \phi^{14} + \phi^{22} + \phi^{30} + \dots 48 \text{ sumandos}$$

Resolución:

Como ϕ es la raíz séptima de la unidad entonces se tiene que $\phi^7 = 1$; $\phi \neq 1$

$$\Rightarrow \phi^7 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (\phi - 1)(\phi^6 + \phi^5 + \phi^4 + \phi^3 + \phi^2 + \phi + 1) = 0$$

Pero $\phi \neq 1$

$$\Rightarrow \phi^6 + \phi^5 + \phi^4 + \phi^3 + \phi^2 + \phi + 1 = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

Entonces

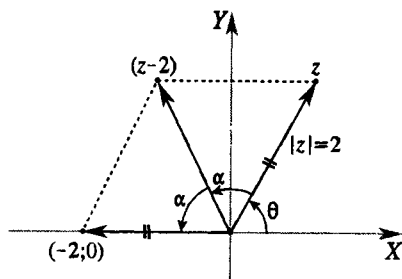
$$\begin{aligned} M &= \underbrace{\phi^6 + 1 + \phi + \phi^2 + \phi^3 + \phi^4 + \phi^5}_0 \\ &\quad + \underbrace{\phi^6 + 1 + \phi + \phi^2 + \phi^3 + \phi^4 + \phi^5}_0 \\ &\quad + \underbrace{\phi^6 + 1 + \phi + \phi^2 + \phi^3 + \phi^4 + \phi^5 - \phi^5}_{\phi^6 + 1 + \phi + \phi^2 + \phi^3 + \phi^4} = -\phi^5 \\ \therefore M &= -\phi^5 \end{aligned}$$

Problema 23

Dado el complejo z de módulo 2 y argumento $\theta \in (0; \pi)$. Hallar el argumento principal de $z-2$.

Resolución:

Se trata de un problema geométrico; por ello lo ubicamos en el plano gausseano



Se observa $\text{Arg}(z-2) = \theta + \alpha$

$$\text{Además } 2\alpha + \theta = \pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi - \theta}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Arg}(z-2) = \theta + \frac{\pi - \theta}{2} = \frac{\theta + \pi}{2}$$

$$\therefore \text{Arg}(z-2) = \frac{\theta + \pi}{2}$$

Problema 24

Siendo

$$x = a + b$$

$$y = aw + bw^2$$

$$z = aw^2 + bw \quad ; \quad ab \neq 0$$

Calcular $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{ab}$, si $w^3 = 1$

Resolución:

De las condiciones

$$x^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$y^2 = a^2w^2 + b^2w^4 + 2abw^3 = a^2w^2 + b^2w + 2ab$$

$$z^2 = a^2w^4 + b^2w^2 + 2abw^3 = a^2w + b^2w^2 + 2ab$$

Entonces

$$x^2 + y^2 + z^2 = \underbrace{a^2(1+w+w^2)}_0 + \underbrace{b^2(1+w+w^2)}_0 + 6ab$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 6ab$$

$$\therefore \frac{x^2 + y^2 + z^2}{ab} = \frac{6ab}{ab} = 6$$

Problema 25

Si el complejo z se define como:

$$z = \frac{\sqrt{\text{Sen } \alpha + i\sqrt{\text{Cos } \alpha}} - i\sqrt{\text{Sen } \alpha - i\sqrt{\text{Cos } \alpha}}}{\sqrt{\text{Sen } \alpha + i\sqrt{\text{Cos } \alpha}} + i\sqrt{\text{Sen } \alpha - i\sqrt{\text{Cos } \alpha}}}$$

tal que $\alpha \in \text{IC}$; hallar $\text{Re}(z)$

Resolución:

Hacemos

$$a = \sqrt{\text{Sen } \alpha + i\sqrt{\text{Cos } \alpha}} \Rightarrow a^2 = \text{Sen } \alpha + i\sqrt{\text{Cos } \alpha}$$

$$b = \sqrt{\text{Sen } \alpha - i\sqrt{\text{Cos } \alpha}} \Rightarrow b^2 = \text{Sen } \alpha - i\sqrt{\text{Cos } \alpha}$$

Además $\text{Cos } \alpha > 0$; $\text{Sen } \alpha > 0$; luego

Reemplazando en z tenemos

$$z = \frac{a - bi}{a + bi} = \frac{(a - bi)^2}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{(a^2 - b^2) - 2abi}{a^2 + b^2}$$

$$\text{Pero } a^2 - b^2 = 2\sqrt{\text{Cos } \alpha} i ; a^2 + b^2 = 2\text{Sen } \alpha$$

$$ab = \sqrt{\text{Sen}^2 \alpha + \text{Cos } \alpha}$$

Regresando a las variables originales

$$z = \frac{[2\sqrt{\text{Cos } \alpha} - 2\sqrt{\text{Sen}^2 \alpha + \text{Cos } \alpha}] i}{2\text{Sen } \alpha}$$

$$z = \frac{[\sqrt{\text{Cos } \alpha} - \sqrt{\text{Sen}^2 \alpha + \text{Cos } \alpha}] i}{\text{Sen } \alpha}$$

El complejo z es imaginario puro

$$\therefore \text{Re}(z) = 0$$

Problema 26

Siendo z un complejo cuyo argumento es θ que verifica

$$\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2 = 1 \text{ donde } \bar{z} \text{ es el conjugado de } z.$$

$$\text{Calcular } H = \text{Tg } \theta + \text{Ctg } \theta$$

$$\text{Además } \theta \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$$

Resolución:

$$\text{Sea } z = |z|e^{i\theta} \Rightarrow \bar{z} = |z|e^{-i\theta}$$

Reemplazando en la condición

$$\left[\frac{|z|e^{i\theta}}{|z|e^{-i\theta}} \right]^2 + \left[\frac{|z|e^{-i\theta}}{|z|e^{i\theta}} \right]^2 = 1$$

$$\Rightarrow e^{i4\theta} + e^{-i4\theta} = 1$$

Expresando en forma polar

$$\cos 4\theta + i \operatorname{Sen} 4\theta + \cos 4\theta - i \operatorname{Sen} 4\theta = 1$$

$$\Rightarrow 2\cos 4\theta = 1$$

$$\cos 4\theta = \frac{1}{2}$$

$$4\theta = 60^\circ \vee 4\theta = 300^\circ$$

$$\theta = 15^\circ \vee \theta = 75^\circ$$

$$\text{Pero } \theta \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right)$$

Entonces nos quedamos con $\theta = 75^\circ$

$$\text{Luego } H = \operatorname{Ctg} \theta + \operatorname{Tg} \theta = \frac{\cos \theta}{\operatorname{Sen} \theta} + \frac{\operatorname{Sen} \theta}{\cos \theta} = 4$$

$$\therefore H = 4$$

Problema 27

Dado

$$z = -1 + \sqrt{3}i; \text{ hallar "w" tal que } |z+w| = |z| = |w|$$

Resolución:

$$|z| = |-1 + \sqrt{3}i| = 2$$

Luego en la condición

$$|z+w|^2 = 4; |z| = |w| = 2$$

$$(z+w)(\overline{z+w}) = 4$$

$$(z+w)(\overline{z} + \overline{w}) = 4$$

Efectuando

$$z \cdot \overline{z} + z \cdot \overline{w} + w \cdot \overline{z} + w \cdot \overline{w} = 4$$

$$|z|^2 + z \cdot \overline{w} + w \cdot \overline{z} + |w|^2 = 4$$

$$\Rightarrow z \cdot \overline{w} + w \cdot \overline{z} + 4 = 0$$

Multiplicando por wz

$$z^2|w|^2 + w^2|z|^2 + 4wz = 0;$$

$$\text{pero } |z|^2 = |w|^2 = 4$$

$$\Rightarrow w^2 + zw + z^2 = 0$$

$$w = \frac{-z \pm \sqrt{3}iz}{2} = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \right) z$$

Reemplazando el valor de z

$$w = \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (-1 + \sqrt{3}i)$$

$$w(+) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (-1 + \sqrt{3}i) = -1 - \sqrt{3}i$$

$$w(-) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (-1 + \sqrt{3}i) = 2$$

Problema 28

Hallar la forma cartesiana del siguiente complejo

$$W = \frac{(\cos 12^\circ + i \operatorname{Sen} 12^\circ)^4 [\sqrt{2}(\cos 8^\circ + i \operatorname{Sen} 8^\circ)]^{11}}{(\cos 6^\circ + i \operatorname{Sen} 6^\circ)^{11} (\operatorname{Sen} 80^\circ + i \cos 80^\circ)}$$

Resolución:

$$* (\cos 12^\circ + i \operatorname{Sen} 12^\circ)^4 = \cos 48^\circ + i \operatorname{Sen} 48^\circ$$

$$* [\sqrt{2}(\cos 8^\circ + i \operatorname{Sen} 8^\circ)]^{11} = \sqrt{2}^{11} (\cos 88^\circ + i \operatorname{Sen} 88^\circ)$$

$$* (\cos 6^\circ + i \operatorname{Sen} 6^\circ)^{11} = \cos 66^\circ + i \operatorname{Sen} 66^\circ$$

$$* \operatorname{Sen} 80^\circ + i \cos 80^\circ = \cos 10^\circ + i \operatorname{Sen} 10^\circ$$

Luego tenemos

$$W = \frac{\operatorname{Cis} 48^\circ \cdot \sqrt{2}^{11} \operatorname{Cis} 88^\circ}{\operatorname{Cis} 66^\circ \cdot \operatorname{Cis} 10^\circ} = \frac{\sqrt{2}^{11} \cdot \operatorname{Cis} (136^\circ)}{\operatorname{Cis} (76^\circ)}$$

$$= 32\sqrt{2} \cdot \operatorname{Cis} 60^\circ$$

$$= 32\sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 16\sqrt{2} (1 + \sqrt{3}i)$$

$$\therefore W = 16\sqrt{2} (1 + \sqrt{3}i)$$

Problema 29

Simplificar y representar fasorialmente

$$H = \left(\frac{1 + \operatorname{Sen} \theta + i \cos \theta}{1 + \operatorname{Sen} \theta - i \cos \theta} \right)^n; \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Además $i = (0;1)$

Resolución:

Recordando la división de complejos; multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador

$$H = \left[\left(\frac{1 + \operatorname{Sen} \theta + i \operatorname{Cos} \theta}{1 + \operatorname{Sen} \theta - i \operatorname{Cos} \theta} \right) \left(\frac{1 + \operatorname{Sen} \theta + i \operatorname{Cos} \theta}{1 + \operatorname{Sen} \theta + i \operatorname{Cos} \theta} \right) \right]^n$$

$$H = \left[\frac{(1 + \operatorname{Sen} \theta)^2 + 2i(1 + \operatorname{Sen} \theta) \operatorname{Cos} \theta + i^2 \operatorname{Cos}^2 \theta}{(1 + \operatorname{Sen} \theta)^2 - i^2 \operatorname{Cos}^2 \theta} \right]^n$$

$$H = \left[\frac{2 \operatorname{Sen} \theta (1 + \operatorname{Sen} \theta) + 2i(1 + \operatorname{Sen} \theta) \operatorname{Cos} \theta}{2(1 + \operatorname{Sen} \theta)} \right]^n$$

$$\forall \operatorname{Sen} \theta \neq -1$$

$$= (\operatorname{Sen} \theta + i \operatorname{Cos} \theta)^n$$

$$= \left(\operatorname{Cos} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) + i \operatorname{Sen} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right)^n$$

$$= \operatorname{Cos} n(\pi/2 - \theta) + i \operatorname{Sen} n(\pi/2 - \theta)$$

$$= \operatorname{Cis} \left[n \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right]$$

$$\therefore H = \operatorname{Cis} \left[n \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right]$$

Problema 30

Hallar el valor más simple de

$$A = \underbrace{(1+w)^2 (1+w^2)^2 (1+w^4)^4 (1+w^8)^8 (1+w^{16})^{16} \dots}_{2n \text{ paréntesis}}$$

Además $w^3 = 1$

Resolución:

$$\text{Como } w^3 = 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 + w + w^2 = 0 \\ w^{3k+r} = w^r \\ 1 + w = -w^2 \\ 1 + w^2 = -w \end{cases}$$

Reemplazando obtenemos

$$A = \underbrace{(1+w^2)^2 (-w)^3 (1+w)^4 (1+w^2)^5 (1+w)^8 (1+w^2)^7 \dots}_{2n \text{ paréntesis}}$$

$$\begin{aligned} &= (-w^2)^2 (-w)^3 (-w^2)^4 (-w)^5 (-w^2)^6 (-w)^7 \dots \\ &= w^4 (-w^3) (w^8) (-w^5) (w^{12}) (-w^7) \dots \end{aligned}$$

Agrupando convenientemente

$$= \underbrace{w(-1)}_{(n \text{ veces})} \underbrace{(w^2)(-w^2)}_{(n \text{ veces})} \underbrace{(1)(-w)}_{(n \text{ veces})} \dots$$

Se tiene

$$\underbrace{(-w)(-w)(-w) \dots}_{(n \text{ veces})} = (-w)^n$$

$$\therefore A = (-w)^n$$

Problema 31

Si $w \neq \pm 1$; es una raíz n -ésima de la unidad, calcular

$$S = w + w^3 + w^5 + \dots + w^{2n-1}$$

Resolución:

Dato $S = w + w^3 + w^5 + \dots + w^{2n-1}$

Multiplicando por w obtenemos

$$S = w^2 + w^4 + w^6 + \dots + w^{2n}$$

Entonces

$$(1+w)S = w + w^2 + w^3 + w^4 + \dots + w^{2n}$$

$$(1+w)S = w(1 + w + w^2 + w^3 + \dots + w^{2n-1})$$

$$(1+w)S = w \left(\frac{1 - w^{2n}}{1 - w} \right)$$

Pero $w^n = 1 \Rightarrow w^{2n} = 1$

Reemplazando se obtiene $S = 0$

Problema 32

Expresar cada ecuación en términos de las coordenadas conjugadas.

a) $3x + 2y = 5$

b) $x^2 + y^2 = 16$

Resolución:

a) Sea $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$

De donde $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$; $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

Reemplazando en $3x+2y=5$

$$3\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right) + 2\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) = 5$$

Efectuando se tiene

$$(3i+2)z + (3i-2)\bar{z} = 10i$$

b) De (a) $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$; $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

Reemplazando en $x^2+y^2=16$

$$\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 = 16$$

Simplificando se tiene $z \cdot \bar{z} = 16$

Otra forma: de la condición

$$x^2 + y^2 = 16 \dots\dots\dots (*)$$

Factorizando el 1° miembro

$$(x+yi)(x-yi) = 16$$

$$\text{Como } z = x+yi \wedge \bar{z} = x-yi$$

$$\text{Tendríamos } z \cdot \bar{z} = 16$$

Problema 33

Dado una familia de números complejos que cumplen

$$4(z-3)(\bar{z}-3) = |z|^2 + 15;$$

seleccionar aquel que tenga mayor argumento principal e indicar su módulo. Tal que z se encuentra en el primer cuadrante.

Resolución:

$$4(z-3)(\bar{z}-3) = |z|^2 + 15$$

$$\Rightarrow 4(z-3)(\overline{z-3}) = |z|^2 + 15$$

$$\Rightarrow 4|z-3|^2 = |z|^2 + 15$$

Luego haciendo $z = x+yi$

$$4|x+yi-3|^2 = |x+yi|^2 + 15$$

$$\Rightarrow 4[(x-3)^2 + y^2] = x^2 + y^2 + 15$$

Efectuando operaciones

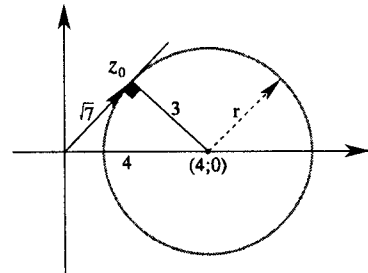
$$x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0$$

completando cuadrados

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 = 9$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 + y^2 = 3^2$$

Se observa que tenemos una circunferencia de centro $C_o = (4;0)$ y radio $r=3$



De la figura se observa que z_0 es el complejo que tiene mayor argumento en el primer cuadrante

$$\therefore |z| = \sqrt{7}$$

Problema 34

Representar gráficamente el conjunto de valores de z tal que

$$\left| \frac{z-2}{z+2} \right| \leq 3$$

Resolución

Sea $z = x + yi$

Reemplazando en el dato

$$\left| \frac{x-2+yi}{x+2+yi} \right| \leq 3$$

$$\Rightarrow |(x-2)+yi| \leq 3|(x+2)+yi|$$

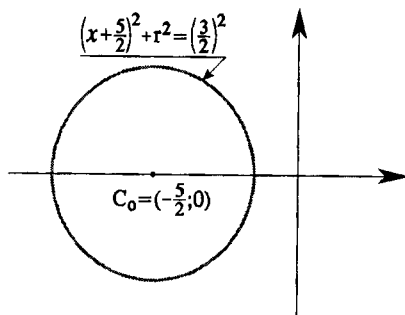
$$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \leq 3\sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + y^2 \leq 9[(x+2)^2 + y^2]$$

Efectuando operaciones y completando cuadrados

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

Graficando se tiene



Problema 35

Dados $r \in \mathbb{R}$; $a_j \in \mathbb{R}$

tal que $j = 0; 1; 2; \dots; (n-1)$

$$a_0 r^n e^{in\theta} + a_1 r^{n-1} e^{i(n-1)\theta} + \dots + a_{n-1} r e^{i\theta} + a_n = 0$$

Calcular

$$E = a_0 r^n e^{in\theta} + a_1 r^{n-1} e^{i(n-1)\theta} + \dots + a_{n-1} r e^{i\theta} + a_n$$

Resolución

Tenemos

$$a_0 r^n e^{in\theta} + a_1 r^{n-1} e^{i(n-1)\theta} + \dots + a_{n-1} r e^{i\theta} + a_n = 0$$

Tomando conjugado miembro a miembro:

$$\overline{a_0 r^n e^{in\theta} + a_1 r^{n-1} e^{i(n-1)\theta} + \dots + a_{n-1} r e^{i\theta} + a_n} = \overline{0}$$

$$a_0 r^n e^{-in\theta} + a_1 r^{n-1} e^{-i(n-1)\theta} + \dots + a_{n-1} r e^{-i\theta} + a_n = 0$$

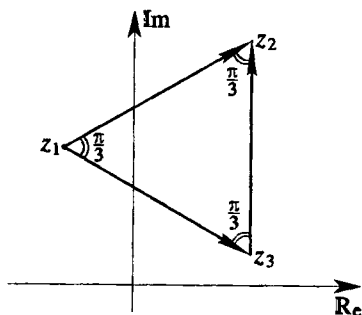
$$\therefore E = 0$$

Problema 36

Si $z_1; z_2; z_3 \in \mathbb{C}$; representan los vértices de un triángulo equilátero. Probar que

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$$

Resolución



De la figura se observa que

$$z_2 - z_1 = e^{i\pi/3} (z_3 - z_1)$$

$$z_1 - z_3 = e^{i\pi/3} (z_2 - z_3)$$

Dividiendo miembro a miembro

$$\frac{z_2 - z_1}{z_1 - z_3} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3}$$

Efectuando

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$$

Problema 37

Simplificar; sabiendo $m = 8$

$$J = \frac{\left(\frac{m}{2^{m-1}}\right) i}{\left(i^{-1} \operatorname{sen} \frac{\pi}{m}\right) \left(i^{-2} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{m}\right) \dots \left(i^{-(m-1)} \operatorname{sen} 2(m-1) \frac{\pi}{m}\right)}$$

Resolución

La expresión es equivalente a

$$\frac{i \cdot i^2 \cdot i^3 \dots i^{m-1} \cdot \left(\frac{m}{2^{m-1}}\right) i}{\left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{m} \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{m} \cdot \operatorname{sen} \frac{3\pi}{m} \dots \operatorname{sen} 2(m-1) \frac{\pi}{m}\right)}$$

Luego simplificando por partes

1) En el numerador; llamándole N

$$N = i^{(m-1)m/2} \cdot i \cdot \frac{m}{2^{m-1}}$$

Como m es múltiplo de 8; entonces

$$\frac{(m-1)m}{2} \text{ es múltiplo de 4.}$$

$$\Rightarrow N = i^4 \cdot i \cdot \frac{m}{2^{m-1}} = \frac{m}{2^{m-1}} i$$

2) En el denominador; llamándole D

$$D = \operatorname{sen} \frac{\pi}{m} \cdot \operatorname{sen} 2 \frac{\pi}{m} \dots \operatorname{sen} 2(m-1) \frac{\pi}{m}$$

Para efecto partimos de la ecuación

$z^m - 1 = 0$; cuyas raíces son

$$1 ; e^{\frac{i2\pi}{m}} ; e^{\frac{i4\pi}{m}} ; \dots e^{i2(m-1)\pi/m}$$

Pero

$$z^m - 1 = (z - 1)(z^{m-1} + z^{m-2} + \dots + z + 1)$$

$$\Rightarrow z^{m-1} + z^{m-2} + \dots + z + 1 = (z - e^{i2\pi/m})$$

$$(z - e^{i4\pi/m})(z - e^{i6\pi/m}) \dots (z - e^{i2(m-1)\pi/m})$$

Si $z = 1$; se tiene

$$m = (1 - e^{i2\pi/m})(1 - e^{i4\pi/m}) \dots (1 - e^{i2(m-1)\pi/m})$$

tomando conjugado

$$\overline{m} = (1 - e^{-i2\pi/m})(1 - e^{-i4\pi/m}) \dots (1 - e^{-i2(m-1)\pi/m})$$

$$m = (1 - e^{-i2\pi/m})(1 - e^{-i4\pi/m}) \dots (1 - e^{-i2(m-1)\pi/m})$$

Multiplicando miembro a miembro

$$m^2 = 2(1 - \cos 2\pi/m) \cdot 2(1 - \cos 4\pi/m) \dots 2(1 - \cos 2(m-1)\pi/m)$$

$$\Rightarrow m^2 = 2^{m-1}(1 - \cos 2\pi/m) \cdot (1 - \cos 4\pi/m) \dots (1 - \cos 2(m-1)\pi/m)$$

$$\Rightarrow m^2 = 2^{m-1} \cdot 2 \cdot \sin^2 \pi/m \cdot 2 \sin^2 2\pi/m \dots 2 \sin^2 (m-1)\pi/m$$

$$\Rightarrow m^2 = 2^{m-1} \cdot 2^{m-1} \cdot \sin^2 \pi/m \cdot \sin^2 2\pi/m \dots \sin^2 (m-1)\pi/m$$

Extrayendo raíz cuadrada y ordenando

$$\sin \pi/m \cdot \sin 2\pi/m \cdot \sin 3\pi/m \dots$$

$$\sin(m-1)\pi/m = \frac{m}{2^{m-1}}$$

$$\Rightarrow D = \frac{m}{2^{m-1}}$$

Luego reemplazando

$$J = \frac{\frac{m}{2^{m-1}}}{\frac{m}{2^{m-1}}} = i \quad \therefore J = i$$

Problema 38

Dados

$$r_3 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\text{tal que } Z_n = r_n e^{i\theta_n}$$

$$\theta_3 = \text{Arctg} \left(\frac{r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2}{r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2} \right)$$

$$\text{Calcular } \frac{r_3 e^{i\theta_3}}{r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2}}$$

Resolución

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

$$z_2 = r_2 e^{i\theta_2} = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

$$\Rightarrow z_1 + z_2 = (r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2) + i(r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2)$$

Luego

$$\begin{aligned} \text{I) } |z_1 + z_2| &= \sqrt{(r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2)^2 + (r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2)^2} \\ &= \sqrt{r_1^2 \cos^2 \theta_1 + 2r_1 r_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + r_2^2 \cos^2 \theta_2 + r_1^2 \sin^2 \theta_1 + 2r_1 r_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + r_2^2 \sin^2 \theta_2} \end{aligned}$$

Simplificando

$$= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2)}$$

$$= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)} \dots \dots \dots (\alpha)$$

$$\text{Entonces } |z_1 + z_2| = r_3$$

$$\text{II) } \arg(z_1 + z_2) = \arctg \left(\frac{r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2}{r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2} \right)$$

$$\Rightarrow \arg(z_1 + z_2) = \theta_3$$

$$\text{De (I) y (II) tenemos } r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} = r_3 e^{i\theta_3}$$

$$\frac{r_3 e^{i\theta_3}}{r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2}} = 1$$

Problemas Propuestos

1. Efectuar algebraica y gráficamente las operaciones indicadas.

- I. $(4+6i)+(3-2i)$
 II. $(5-3i)-(-3+i)$
 III. $(-2+2i)-(-2-i)$
 IV. $(4-3i)+(-6-9i)$

Donde $i = \sqrt{-1}$

2. Escribir los siguientes números complejos en forma polar.

- I. $4 + 4i$
 II. $3 - \sqrt{3}i$
 III. $-12 - 12i$
 IV. $\sqrt{3}i$
 V. $12 - 5i$
 VI. $-4i$

Donde: $i = (0;1)$

3. Escribir los números complejos siguientes en la forma cartesiana.

- I. $\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$
 II. $12(\cos 135^\circ - i\sin 135^\circ)$
 III. $4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ)$
 IV. $5\sqrt{3} \angle 210^\circ$
 V. $18\text{Cis}(75^\circ)$

4. Efectuar las operaciones indicadas, expresando los resultados en forma binómica.

- I. $[16(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)][2(\cos 75^\circ + i\sin 75^\circ)]$
 II. $4\text{Cis}13^\circ \text{Cis}(27)2\text{Cis}20^\circ$
 III. $5 \angle 16^\circ \cdot 2 \angle 19^\circ \cdot 2 \angle 25^\circ$
 IV. $\frac{12(\cos 16^\circ + i\sin 16^\circ)}{3(\cos 44^\circ + i\sin 44^\circ)[2(\cos 62^\circ + i\sin 62^\circ)]}$

5. Hallar algebraica y gráficamente el producto y cociente de:

- I. $(-2+2\sqrt{3}i)(2\sqrt{3}-2i)$
 II. $\frac{4-4i}{\sqrt{3}-i}$

6. Hallar las potencias indicadas de los números complejos siguientes; expresando los resultados en forma cartesiana.

- I. $2(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)^6$
 II. $[4(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)]^3$
 III. $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i\right)^{10}$

7. Hallar todas las raíces indicadas y representar gráficamente.

- I. $(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ)^{1/5}$
 II. $[32(\cos 200^\circ + i\sin 200^\circ)]^{1/5}$
 III. $\sqrt[3]{\sqrt{3}-i}$
 IV. $\sqrt[5]{2-2\sqrt{3}i}$

8. Calcular :

- I. $(1+2i)^6$
 II. $(2+i)^7 + (2-i)^7$
 III. $(1+2i)^5 - (1-2i)^5$

9. Dada la igualdad $(1+2i)x + (3-5i)y = 1-3i$, además $\{x,y\} \subset \mathbb{R}$ Hallar "x" e "y"

- A) $x=1$; $y=4$
 B) $x=-1$; $y=4$
 C) $x=-\frac{4}{11}$; $y=\frac{5}{11}$
 D) $x=\frac{11}{4}$; $y=\frac{11}{5}$
 E) $x=\frac{4}{11}$; $y=\frac{5}{11}$

10. Si
- $i = (0;1)$

Hallar el valor de

$$E = \frac{x^4 + 4}{(x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i)}$$

- A) 0 B) 1 C) 2
D) -1 E) 3

11. Dados $z_1 = (a;b)$; $z_2 = c+di$ donde $\{a;b;c;d\} \subset \mathbb{R}$; además $i = \sqrt{-1}$. Averiguar cuáles deben ser las condiciones para que el cociente $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ sea imaginario puro ?

- A) $bc = ad$ B) $ac+bd = 0$
C) $a+b = c+d$
D) $ab = cd$ E) $bd = ac$

12. Calcular el valor de $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$;

donde "n" es un entero positivo.

- A) -2 B) $2i^n$ C) $-2i^{n+1}$
D) -2i E) $2i^{n+1}$

13. Efectuando

$$\frac{\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{30}}{\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{30}}$$

se obtiene:

- A) 1 B) -1 C) i
D) -i E) $\frac{1}{2}$

14. Sea
- $W = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\text{Hallar } E = \frac{(a+b)(a+bw)(a+bw^2)}{(aw^2+bw)(bw^2+aw)}$$

- A) $\frac{a}{b}$ B) $a-b$ C) $\frac{a+b}{a-b}$
D) a^3-b^3 E) $a+b$

15. Si
- $\sqrt{a+bi} = \pm(\alpha + \beta i)$

¿A qué es igual $\sqrt{-a-bi}$?

- A) $\alpha - \beta i$ B) $\alpha + \beta i$ C) $-\beta + \alpha i$
D) $\beta - \alpha i$ E) $\pm(-\beta + \alpha i)$

16. Si
- $x+yi = (s+ti)^n$
- ;
- $n \in \mathbb{Z} \wedge \{x;y;s;t\} \subset \mathbb{R}$

$$\text{Calcular el valor de } \left(\frac{s^2+t^2}{x^2+y^2}\right)^n$$

- A) 1 B) 0 C) n
D) 3 E) 2

17. Si
- z
- y
- z'
- son dos números complejos;

 $u = \sqrt{z \cdot z'}$. Hallar:

$$\frac{\left|\frac{z+z'}{2} - u\right| + \left|\frac{z+z'}{2} + u\right|}{|z| + |z'|}$$

- A) 4 B) 1 C) 16
D) 2 E) 8

18. Si como resultado de efectuar una cantidad finita de operaciones racionales (o sea sumar, restar, multiplicar y dividir) con los números x_1 ; x_2 ; x_3 ; ; x_n resulta el número u .

Calcular el valor de efectuar las mismas operaciones con los números conjugados

$$\overline{x_1}; \overline{x_2}; \overline{x_3}; \dots; \overline{x_n}$$

Observación: u^* es opuesto de u

A) \overline{u}

B) u^*

C) u

D) $u \cdot \overline{u}$

E) $\overline{u} \cdot u^*$

19. Si $\phi(a+1) = a\phi(a)$; $\phi(1) = 1$

determinar

$$\zeta = i^{\phi(1)} + i^{\phi(2)} + i^{\phi(3)} + \dots + i^{\phi(n-12)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

A) $n+7+i$

B) $n+7-2i$

C) $n+5-2i$

D) $n+6+2i$

E) $n+8-2i$

20. Evaluar

$$\phi = i + 2i^2 + 5i^5 + 8i^8 + \dots + (3n-1)i^{3n-1}$$

$$\text{siendo } i = (0;1) \wedge n = \overset{\circ}{4}$$

A) $\frac{1}{2}(n+1)i$

B) $\frac{1}{2}(n-1)i$

C) $\frac{1}{2}[(2-3n) + 3ni]$

D) $\frac{1}{2}[3n + (2-3n)i]$

E) $\frac{1}{2}[(-3n + (3n-2))i]$

21. Sabiendo que

$$\sigma = \cos 12^\circ - i \sin 12^\circ$$

$$\text{Hallar el valor de } M = \sigma^{15} + \frac{1}{\sigma^{15}}$$

A) 2

B) $\frac{1}{2}$

C) 1

D) -2

E) $-\frac{1}{2}$

22. Calcular un valor de

$$\sqrt[3]{-2\sqrt{-2\sqrt[10]{i}\sqrt[11]{1-\sqrt[9]{i}}}}$$

A) -i

B) i

C) 1-i

D) 1

E) 1+i

23. Si $|z+w| = |z-w|$

$$\forall z; w \in \mathbb{C}; \text{ hallar } \operatorname{Re}(z\overline{w})$$

A) 1

B) 0

C) -1

D) 2

E) -2

24. Si $w \neq 1$ es una n -raíz de la unidad, calcular la suma

$$S = 1 + 4w + 9w^2 + \dots + n^2w^{n-1}$$

A) $\frac{-n}{(w-1)^2}$

B) $\frac{n^2(1-w)}{2n(1+w)}$

C) $\frac{2n+n^2(1-w)}{(1-w)^2}$

D) $\frac{-2n+n^2(1-w)}{(1-w)^2}$

E) $\frac{n+(1-w)n^2}{w}$

25. Si $w \neq 1$ es una raíz n -ésima primitiva de la unidad y $h \in \mathbb{N}$; coprimo con n ; calcular $S = 1 + w^h + w^{2h} + w^{3h} + \dots + w^{(n-1)h}$

A) 1 B) 0 C) w^h
D) w^{nh} E) w^{h+1}

26. Determinar si es falso o verdadero las siguientes proposiciones respecto al número complejo :

$$Z = (1 - \sqrt{3})^8 (1 - \sqrt{2})^3 e^{5 + \frac{\pi}{3}i}$$

I. $z = (1 - \sqrt{3})^8 (1 - \sqrt{2})^3$

II. Su argumento principal es $\frac{4\pi}{3}$

III. Su argumento es $7\pi/12$

IV. Su argumento es $16\pi/3$

A) FVFF B) VVFF C) FFFV
D) VVVV E) FFFV

27. El módulo del cuadrado del producto de un número complejo z por su conjugada es igual a 16 y éste valor coincide con el radio de la circunferencia con centro en el origen, sabiendo que una de sus raíces de orden cuatro de un número complejo w se encuentra sobre ésta y además una de sus raíces tiene como argumento el valor de $\pi/12$ radianes. Indicar el valor principal de la raíz de orden 3 de dicho número complejo w .

A) $\sqrt[3]{16}$ B) $\sqrt[3]{16} \operatorname{cis} \pi/3$
C) $\sqrt[3]{16} \operatorname{cis} \pi/6$
D) $\sqrt[3]{16} \operatorname{cis} \pi/9$ E) $\sqrt[3]{16} \operatorname{cis} \pi$

28. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que cumple

$$|z + z_0| \leq a; \text{ donde: } z_0 = (a; a); a \in \mathbb{R}^+.$$

Calcular el argumento de z cuya distancia a la recta vertical que pasa por $x = -3a$ sea mínima.

A) $\left(\frac{33}{2}\right)^\circ$ B) $\left(\frac{37}{2}\right)^\circ$ C) 45°
D) $\left(\frac{127}{2}\right)^\circ$ E) $\left(\frac{413}{2}\right)^\circ$

29. Siendo α y β dos raíces cúbicas de $(-i)$, calcular el valor de la expresión

$$L = \frac{(i + \alpha)^{123} + (i + \beta)^{234} + (\alpha + \beta)^{345}}{\alpha + \beta - i}$$

Además α, β son diferentes de i

A) i B) $\frac{1}{2}$ C) -1
D) $\frac{1}{2}i$ E) $-\frac{1}{2}i$

30. Dado un complejo z ; tal que

$$\operatorname{Re}(z) \neq \operatorname{Im}(z) \wedge \operatorname{Arg}(z) \neq k\pi/2; k \in \mathbb{Z}.$$

Calcular el resultado de efectuar

$$\frac{2\bar{z}^2 + |z|^2}{z^2 + 2|z|^2}$$

sabiendo que es un número imaginario puro.

A) i B) $-i$ C) 2
D) -2 E) A ó B

31. Reducir el siguiente número complejo:

$$Z = \frac{\sqrt{3+2a} + i\sqrt{3-2a}}{\sqrt{3+2a} - i\sqrt{3-2a}} - \frac{\sqrt{3-2a} + i\sqrt{3+2a}}{\sqrt{3-2a} - i\sqrt{3+2a}}; -\frac{3}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$$

- A) $\frac{2a}{3}$ B) $-\frac{2a}{3}$ C) $\frac{a}{3}$
 D) $\frac{4a}{3}$ E) $-\frac{4a}{3}$

32. Hallar el argumento del complejo

$$Z = i^w$$

siendo "w" una raíz cúbica no real de la unidad.

- A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{3\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{4}$
 D) $\frac{3\pi}{2}$ E) π

33. Una de las raíces de orden 4 de un número complejo de módulo 16; tiene argumento igual a $7\pi/12$. Indicar la raíz correspondiente al mayor argumento positivo.

- A) $2\text{cis}(19\pi/12)$ B) $2\text{cis}(3\pi/2)$
 C) $2\text{cis}(13\pi/2)$
 D) $2\text{cis}(17\pi/12)$ E) $4\text{cis}(3\pi/2)$

34. De todos los complejos "z" que cumplan:

$$|z + 3| = 2 \quad ; \quad 0 < \arg(z) < 2\pi$$

Seleccionar el que tenga mayor y menor argumento y dar como respuesta la suma de sus partes imaginarias.

- A) 4 B) 0 C) -2
 D) 2 E) -4

35. Si

$$J = \left[\frac{1 + \sqrt[n]{1}}{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \right]^{np} ; k = 1; 2; \dots$$

Calcular J

- A) 1 B) $\left| \sin \frac{k\pi}{n} \right|$ C) $\cos \frac{k\pi}{n}$

- D) np E) 2

36. Dado

$$f(x+yi) = \frac{x+i}{1-yi} \quad ; \quad \{x; y\} \in \mathbb{R}$$

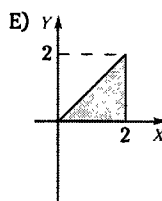
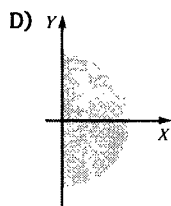
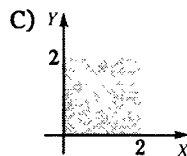
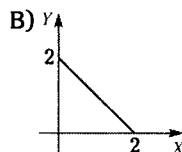
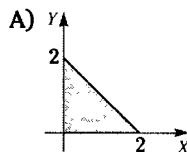
Señalar un valor de $f(\sqrt{i})$

Además $i^2 = -1$

- A) i B) -1 C) 0
 D) $e^{\pi/2}$ E) 3i

37. Determinar la gráfica de

$$H = \{z \in \mathbb{C} / |\operatorname{Re} z + \operatorname{Im}(z)| \leq 2 \wedge 0 \leq \arg(z) \leq \pi/2\}$$



38. Determinar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

I. $\forall z \neq 0; \left| \frac{z}{|z|} - 1 \right| \leq |\arg(z)|$

II. $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$
 $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

III. $|e^{ix}| = 1 \forall x \in \mathbb{R}$

- A) FFV B) VVV C) VFV
 D) FVV E) VVF

39. Un número complejo y su conjugado son tales que $z \cdot \bar{z} + 2z = 12 + 4i$

$\arg(z) \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right]$. Calcular $|z|$

- A) $2\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{5}$
 D) $3\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{5}$

40. Indicar el lugar geométrico para $z_1; z_2; z \in \mathbb{C}$ tal que:

$$\arg \left\{ \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \right\} = 0$$

- A) es una circunferencia
 B) es una elipse
 C) es una hipérbola
 D) es una recta
 E) es una parábola

41. Si los complejos $z_1; z_2; z_3; z_4$ son las vértices del cuadrilátero ABCD. Dicho cuadrilátero es un paralelogramo si:

- A) $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$
 B) $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$
 C) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0$
 D) $z_1 - z_2 - z_3 + z_4 = 0$
 E) $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + z_4^3 = 0$

42. Simplificar

$$\frac{(\cos \theta_1; \sin \theta_1)(\cos \theta_2; \sin \theta_2) \dots (\cos \theta_n; \sin \theta_n)}{[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n); \sin(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)]}$$

- A) 0 B) 1 C) -1
 D) $\cos^n \theta_n + \sin^n \theta_n i$ E) i

43. Dados: $p, m \in \mathbb{R}$; Reducir

$$e^{2mi \operatorname{Ctg}^{-1} p} \left\{ \frac{pi + 1}{pi - 1} \right\}^m$$

- A) 0 B) -1 C) 1
 D) m E) p.m

44. Si $m \in \mathbb{Z}^+ \wedge m \geq 2$, hallar el valor de

$$\left(i \operatorname{Ctg} \frac{\pi}{2m} \cdot \operatorname{Ctg} \frac{2\pi}{2m} \cdot \operatorname{Ctg} \frac{3\pi}{2m} \dots \operatorname{Ctg} \frac{(m-1)\pi}{2m} \right)^2$$

- A) 2 B) -2 C) 1
 D) -1 E) 0

45. Demostrar

I. $\operatorname{Re}\{z_1 z_2\} = \operatorname{Re}\{z_1\} \operatorname{Re}\{z_2\} - \operatorname{Im}\{z_1\} \operatorname{Im}\{z_2\}$

II. $\operatorname{Im}\{z_1 z_2\} = \operatorname{Re}\{z_1\} \operatorname{Im}\{z_2\} + \operatorname{Im}\{z_1\} \operatorname{Re}\{z_2\}$

tal que $z_1; z_2 \in \mathbb{C}$

46. Si los puntos P_1 y P_2 son los afijos de $z_1; z_2 \in \mathbb{C}$ tal que: $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$; entonces:

- A) (z_1/z_2) es un imaginario puro
 B) $z_1 z_2$ es un imaginario puro
 C) $z_1 z_2$ es complejo R
 D) $m \angle P_1 O P_2 = \frac{\pi}{2}$
 E) $A \vee D$

1	*	14	E	27	D	40	D
2	*	15	E	28	E	41	D
3	*	16	A	29	E	42	B
4	*	17	B	30	E	43	C
5	*	18	A	31	D	44	D
6	*	19	D	32	C	45	*
7	*	20	D	33	A	46	E
8	*	21	D	34	B	47	D
9	C	22	E	35	A	48	B
10	B	23	B	36	A	49	B
11	B	24	B	37	A	50	*
12	C	25	D	38	B	51	B
13	A	26	A	39	C	52	C

* Demostraciones y sub preguntas

Claves